The Laplace Transform of step functions (Sect. 4.3).

- Overview and notation.
- The definition of a step function.
- Piecewise discontinuous functions.
- ► The Laplace Transform of discontinuous functions.

Properties of the Laplace Transform.

Overview: The Laplace Transform method can be used to solve constant coefficients differential equations with *discontinuous source functions*.

▲□▶▲□▶▲□▶▲□▶ □ のQ@

Overview: The Laplace Transform method can be used to solve constant coefficients differential equations with *discontinuous source functions*.

Notation: If $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, then we denote $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$.

Overview: The Laplace Transform method can be used to solve constant coefficients differential equations with *discontinuous source functions*.

Notation: If $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, then we denote $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$.

Remark: One can show that for a particular type of functions f, that includes all functions we work with in this Section, the notation above is well-defined.

・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・

Overview: The Laplace Transform method can be used to solve constant coefficients differential equations with *discontinuous source functions*.

Notation: If $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, then we denote $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$.

Remark: One can show that for a particular type of functions f, that includes all functions we work with in this Section, the notation above is well-defined.

Example

From the Laplace Transform table we know that $\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$.

Overview: The Laplace Transform method can be used to solve constant coefficients differential equations with *discontinuous source functions*.

Notation: If $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, then we denote $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$.

Remark: One can show that for a particular type of functions f, that includes all functions we work with in this Section, the notation above is well-defined.

Example

From the Laplace Transform table we know that $\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$. Then also holds that $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right] = e^{at}$.

(日) (同) (三) (三) (三) (○) (○)

The Laplace Transform of step functions (Sect. 4.3).

- Overview and notation.
- ► The definition of a step function.
- Piecewise discontinuous functions.
- ► The Laplace Transform of discontinuous functions.

・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・

Properties of the Laplace Transform.

Definition

A function u is called a *step function* at t = 0 iff holds

$$u(t) = egin{cases} 0 & ext{for } t < 0, \ 1 & ext{for } t \geqslant 0. \end{cases}$$

(ロ)、(型)、(E)、(E)、 E、 の(の)

Definition

A function u is called a *step function* at t = 0 iff holds

$$u(t) = egin{cases} 0 & ext{for } t < 0, \ 1 & ext{for } t \geqslant 0. \end{cases}$$

Example

Graph the step function values u(t) above, and the translations u(t-c) and u(t+c) with c > 0.

▲□▶▲□▶▲□▶▲□▶ □ のQ@

Definition

A function u is called a *step function* at t = 0 iff holds

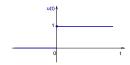
$$u(t) = egin{cases} 0 & ext{for } t < 0, \ 1 & ext{for } t \geqslant 0. \end{cases}$$

Example

Graph the step function values u(t) above, and the translations u(t-c) and u(t+c) with c > 0.

・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・

Solution:



Definition

A function u is called a *step function* at t = 0 iff holds

$$u(t) = egin{cases} 0 & ext{for } t < 0, \ 1 & ext{for } t \geqslant 0. \end{cases}$$

Example

Graph the step function values u(t) above, and the translations u(t-c) and u(t+c) with c > 0.

Solution:



Definition

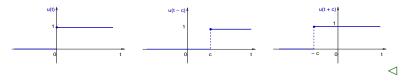
A function u is called a *step function* at t = 0 iff holds

$$u(t) = \begin{cases} 0 & ext{for } t < 0, \ 1 & ext{for } t \geqslant 0. \end{cases}$$

Example

Graph the step function values u(t) above, and the translations u(t-c) and u(t+c) with c > 0.

Solution:



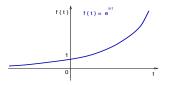
Remark: Given any function values f(t) and c > 0, then f(t - c) is a right translation of f and f(t + c) is a left translation of f.

◆□▶ ◆□▶ ◆臣▶ ◆臣▶ 三臣 - のへぐ

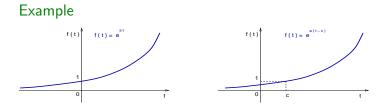
Remark: Given any function values f(t) and c > 0, then f(t - c) is a right translation of f and f(t + c) is a left translation of f.

▲ロト ▲帰 ト ▲ヨト ▲ヨト 三三 - のへぐ

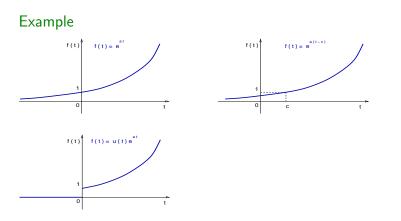
Example



Remark: Given any function values f(t) and c > 0, then f(t - c) is a right translation of f and f(t + c) is a left translation of f.

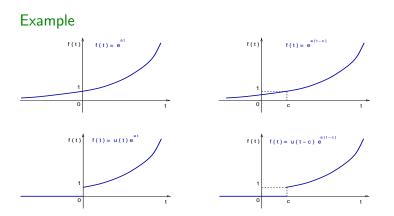


Remark: Given any function values f(t) and c > 0, then f(t - c) is a right translation of f and f(t + c) is a left translation of f.



◆□ > ◆□ > ◆豆 > ◆豆 > ・豆 = のへ⊙

Remark: Given any function values f(t) and c > 0, then f(t - c) is a right translation of f and f(t + c) is a left translation of f.



◆□> ◆□> ◆目> ◆目> ◆目> 三日 のへで

The Laplace Transform of step functions (Sect. 4.3).

- Overview and notation.
- The definition of a step function.
- Piecewise discontinuous functions.
- ► The Laplace Transform of discontinuous functions.

< □ > < 同 > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > <

Properties of the Laplace Transform.

Example

Graph of the function b(t) = u(t - a) - u(t - b), with 0 < a < b.

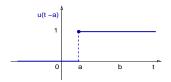
▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□ ▶ ④ ●

Example

Graph of the function b(t) = u(t - a) - u(t - b), with 0 < a < b.

◆□▶ ◆□▶ ◆三▶ ◆三▶ 三三 のへぐ

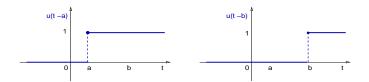
Solution: The bump function b can be graphed as follows:



Example

Graph of the function b(t) = u(t - a) - u(t - b), with 0 < a < b.

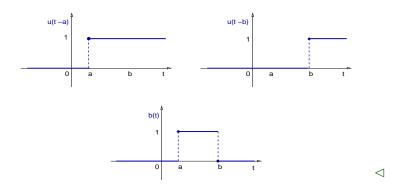
Solution: The bump function b can be graphed as follows:



Example

Graph of the function b(t) = u(t - a) - u(t - b), with 0 < a < b.

Solution: The bump function b can be graphed as follows:



Example

Graph of the function $f(t) = e^{at} [u(t-1) - u(t-2)]$.

▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□ ▶ ④ ●

Example

Graph of the function $f(t) = e^{at} [u(t-1) - u(t-2)]$. Solution:

 $y = f(t) = e^{at} [u(t-1) - u(t-2)]$ e^{at} [u(t-1) - u(t-2)] 1 = 2 = t

Example

Graph of the function $f(t) = e^{at} [u(t-1) - u(t-2)]$. Solution:

 $y = f(t) = e^{at} [u(t-1) - u(t-2)]$ e^{at} [u(t-1) - u(t-2)] 1 = 2 = t

Notation: It is common in the literature to denote the function values u(t - c) as $u_c(t)$.

The Laplace Transform of step functions (Sect. 4.3).

- Overview and notation.
- The definition of a step function.
- Piecewise discontinuous functions.
- ► The Laplace Transform of discontinuous functions.

< □ > < 同 > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > <

Properties of the Laplace Transform.

Theorem

Given any real number $c \ge 0$, the following equation holds,

$$\mathcal{L}[u(t-c)] = \frac{e^{-cs}}{s}, \qquad s > 0.$$

◆□▶ ◆□▶ ◆□▶ ◆□▶ □□ - のへぐ

Theorem

Given any real number $c \ge 0$, the following equation holds,

$$\mathcal{L}[u(t-c)]=\frac{e^{-cs}}{s}, \qquad s>0.$$

< □ > < 同 > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > <

Proof:

$$\mathcal{L}[u(t-c)] = \int_0^\infty e^{-st} u(t-c) \, dt$$

Theorem

Given any real number $c \ge 0$, the following equation holds,

$$\mathcal{L}[u(t-c)]=\frac{e^{-cs}}{s}, \qquad s>0.$$

Proof:

$$\mathcal{L}[u(t-c)] = \int_0^\infty e^{-st} u(t-c) \, dt = \int_c^\infty e^{-st} \, dt,$$

< □ > < 同 > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > <

Theorem

Given any real number $c \ge 0$, the following equation holds,

$$\mathcal{L}[u(t-c)]=\frac{e^{-cs}}{s}, \qquad s>0.$$

Proof:

$$\mathcal{L}[u(t-c)] = \int_0^\infty e^{-st} u(t-c) \, dt = \int_c^\infty e^{-st} \, dt,$$

< □ > < 同 > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > <

$$\mathcal{L}[u(t-c)] = \lim_{N \to \infty} -\frac{1}{s} \left(e^{-Ns} - e^{-cs} \right)$$

Theorem

Given any real number $c \ge 0$, the following equation holds,

$$\mathcal{L}[u(t-c)]=\frac{e^{-cs}}{s}, \qquad s>0.$$

Proof:

$$\mathcal{L}[u(t-c)] = \int_0^\infty e^{-st} u(t-c) \, dt = \int_c^\infty e^{-st} \, dt,$$

$$\mathcal{L}[u(t-c)] = \lim_{N \to \infty} -\frac{1}{s} \left(e^{-Ns} - e^{-cs} \right) = \frac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0.$$

< □ > < 同 > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > <

We conclude that $\mathcal{L}[u(t-c)] = \frac{e^{-cs}}{s}$.

Example Compute $\mathcal{L}[3u(t-2)]$.



▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□ ▶ ④ ●

Example

Compute $\mathcal{L}[3u(t-2)]$.

Solution:
$$\mathcal{L}[3u(t-2)] = 3\mathcal{L}[u(t-2)]$$

Example

Compute $\mathcal{L}[3u(t-2)]$.

Solution:
$$\mathcal{L}[3u(t-2)] = 3\mathcal{L}[u(t-2)] = 3\frac{e^{-2s}}{s}$$
.

▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□ ▶ ④ ●

Example

Compute $\mathcal{L}[3u(t-2)]$.

Solution:
$$\mathcal{L}[3u(t-2)] = 3\mathcal{L}[u(t-2)] = 3\frac{e^{-2s}}{s}$$
.

We conclude: $\mathcal{L}[3u(t-2)] = \frac{3e^{-2s}}{s}$.

\sim

◆□▶ ◆□▶ ◆三▶ ◆三▶ 三三 のへぐ

Example

Compute $\mathcal{L}[3u(t-2)]$.

Solution:
$$\mathcal{L}[3u(t-2)] = 3\mathcal{L}[u(t-2)] = 3\frac{e^{-2s}}{s}$$
.

<1

< □ > < 同 > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > <

We conclude: $\mathcal{L}[3u(t-2)] = \frac{3e^{-2s}}{s}$.

Example

Compute $\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{2e^{-3s}}{s}\Big].$

Example

Compute $\mathcal{L}[3u(t-2)]$.

Solution:
$$\mathcal{L}[3u(t-2)] = 3\mathcal{L}[u(t-2)] = 3\frac{e^{-2s}}{s}$$
.

<1

< □ > < 同 > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > <

We conclude: $\mathcal{L}[3u(t-2)] = \frac{3e^{-2s}}{s}$.

Example

Compute
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2e^{-3s}}{s}\right]$$
.
Solution: Since $\mathcal{L}[u(t-c)] = \frac{e^{-cs}}{s}$,

Example

Compute $\mathcal{L}[3u(t-2)]$.

Solution:
$$\mathcal{L}[3u(t-2)] = 3\mathcal{L}[u(t-2)] = 3\frac{e^{-2s}}{s}$$
.

<1

We conclude: $\mathcal{L}[3u(t-2)] = \frac{3e^{-2s}}{s}$.

Example

Compute
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2e^{-3s}}{s}\right]$$

Solution: Since $\mathcal{L}[u(t-c)] = \frac{e^{-cs}}{s}$, for c = 3 we get $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-3s}}{s}\right]$

Example

Compute $\mathcal{L}[3u(t-2)]$.

Solution:
$$\mathcal{L}[3u(t-2)] = 3\mathcal{L}[u(t-2)] = 3\frac{e^{-2s}}{s}$$
.

<1

◆□▶ ◆□▶ ◆三▶ ◆三▶ 三三 のへぐ

We conclude: $\mathcal{L}[3u(t-2)] = \frac{3e^{-2s}}{s}$.

Example

Compute
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2e^{-3s}}{s}\right]$$
.

Solution: Since
$$\mathcal{L}[u(t-c)] = \frac{e^{-cs}}{s}$$
, for $c = 3$ we get $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-3s}}{s}\right] = u(t-3).$

Example

Compute $\mathcal{L}[3u(t-2)]$.

Solution:
$$\mathcal{L}[3u(t-2)] = 3\mathcal{L}[u(t-2)] = 3\frac{e^{-2s}}{s}$$
.

We conclude: $\mathcal{L}[3u(t-2)] = \frac{3e^{-2s}}{s}$.

Example

Compute
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2e^{-3s}}{s}\right]$$

Solution: Since $\mathcal{L}[u(t-c)] = \frac{e^{-cs}}{s}$, for c = 3 we get $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-3s}}{s}\right] = u(t-3)$. Therefore, $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2e^{-3s}}{s}\right] = 2u(t-3)$.

<1

The Laplace Transform of step functions (Sect. 4.3).

- Overview and notation.
- The definition of a step function.
- Piecewise discontinuous functions.
- ► The Laplace Transform of discontinuous functions.

< □ > < 同 > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > <

► Properties of the Laplace Transform.

Theorem (Translations) If $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ exists for $s > a \ge 0$ and $c \ge 0$, then holds

$$\mathcal{L}[u(t-c)f(t-c)] = e^{-cs} F(s), \qquad s > a.$$

Furthermore,

$$\mathcal{L}[e^{ct}f(t)] = F(s-c), \qquad s > a+c.$$

< □ > < 同 > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > <

Theorem (Translations) If $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ exists for $s > a \ge 0$ and $c \ge 0$, then holds

$$\mathcal{L}[u(t-c)f(t-c)] = e^{-cs} F(s), \qquad s > a.$$

Furthermore,

$$\mathcal{L}[e^{ct}f(t)] = F(s-c), \qquad s > a+c.$$

▲ロト ▲帰 ト ▲ヨト ▲ヨト - ヨ - の々ぐ

Remark:

• $\mathcal{L}[\text{translation } (uf)] = (\exp) (\mathcal{L}[f]).$

Theorem (Translations) If $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ exists for $s > a \ge 0$ and $c \ge 0$, then holds

$$\mathcal{L}[u(t-c)f(t-c)] = e^{-cs} F(s), \qquad s > a.$$

Furthermore,

$$\mathcal{L}[e^{ct}f(t)] = F(s-c), \qquad s > a+c.$$

Remark:

- $\mathcal{L}[\text{translation } (uf)] = (\exp) (\mathcal{L}[f]).$
- $\mathcal{L}[(\exp)(f)] = \operatorname{translation}(\mathcal{L}[f]).$

Theorem (Translations) If $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ exists for $s > a \ge 0$ and $c \ge 0$, then holds

$$\mathcal{L}[u(t-c)f(t-c)] = e^{-cs} F(s), \qquad s > a.$$

Furthermore,

$$\mathcal{L}[e^{ct}f(t)] = F(s-c), \qquad s > a+c.$$

・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・

Remark:

- $\mathcal{L}[\text{translation } (uf)] = (\exp) (\mathcal{L}[f]).$
- $\mathcal{L}[(\exp)(f)] = \operatorname{translation}(\mathcal{L}[f]).$

Equivalent notation:

•
$$\mathcal{L}[u(t-c)f(t-c)] = e^{-cs}\mathcal{L}[f(t)]$$

Theorem (Translations) If $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ exists for $s > a \ge 0$ and $c \ge 0$, then holds

$$\mathcal{L}[u(t-c)f(t-c)] = e^{-cs} F(s), \qquad s > a.$$

Furthermore,

$$\mathcal{L}[e^{ct}f(t)] = F(s-c), \qquad s > a+c.$$

・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・

Remark:

- $\mathcal{L}[\text{translation } (uf)] = (\exp) (\mathcal{L}[f]).$
- $\mathcal{L}[(\exp)(f)] = \operatorname{translation}(\mathcal{L}[f]).$

Equivalent notation:

$$\blacktriangleright \mathcal{L}[u(t-c)f(t-c)] = e^{-cs} \mathcal{L}[f(t)]$$

•
$$\mathcal{L}[e^{ct}f(t)] = \mathcal{L}[f](s-c).$$

Example

Compute $\mathcal{L}[u(t-2)\sin(a(t-2))]$.

◆□▶ ◆□▶ ◆□▶ ◆□▶ □□ - のへぐ

Example Compute $\mathcal{L}[u(t-2) \sin(a(t-2))]$. Solution: $\mathcal{L}[\sin(at)] = \frac{a}{s^2 + a^2}$,

- ロ ト - 4 回 ト - 4 □ - 4

Example Compute $\mathcal{L}[u(t-2) \sin(a(t-2))]$. Solution: $\mathcal{L}[\sin(at)] = \frac{a}{s^2 + a^2}$, $\mathcal{L}[u(t-c)f(t-c)] = e^{-cs} \mathcal{L}[f(t)]$.

Example Compute $\mathcal{L}[u(t-2) \sin(a(t-2))]$. Solution: $\mathcal{L}[\sin(at)] = \frac{a}{s^2 + a^2}$, $\mathcal{L}[u(t-c)f(t-c)] = e^{-cs} \mathcal{L}[f(t)]$.

$$\mathcal{L}[u(t-2)\sin(a(t-2))] = e^{-2s}\mathcal{L}[\sin(at)]$$

Example Compute $\mathcal{L}[u(t-2)\sin(a(t-2))]$. Solution: $\mathcal{L}[\sin(at)] = \frac{a}{s^2 + a^2}$, $\mathcal{L}[u(t-c)f(t-c)] = e^{-cs}\mathcal{L}[f(t)]$.

$$\mathcal{L}[u(t-2)\sin(a(t-2))] = e^{-2s}\mathcal{L}[\sin(at)] = e^{-2s}\frac{a}{s^2+a^2}.$$

・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・

Example Compute $\mathcal{L}[u(t-2)\sin(a(t-2))]$. Solution: $\mathcal{L}[\sin(at)] = \frac{a}{s^2 + a^2}$, $\mathcal{L}[u(t-c)f(t-c)] = e^{-cs}\mathcal{L}[f(t)]$. $\mathcal{L}[u(t-2)\sin(a(t-2))] = e^{-2s}\mathcal{L}[\sin(at)] = e^{-2s}\frac{a}{s^2 + a^2}$. We conclude: $\mathcal{L}[u(t-2)\sin(a(t-2))] = e^{-2s}\frac{a}{s^2 + a^2}$.

Example Compute $\mathcal{L}[u(t-2)\sin(a(t-2))]$. Solution: $\mathcal{L}[\sin(at)] = \frac{a}{s^2 + a^2}$, $\mathcal{L}[u(t-c)f(t-c)] = e^{-cs}\mathcal{L}[f(t)]$. $\mathcal{L}[u(t-2)\sin(a(t-2))] = e^{-2s} \mathcal{L}[\sin(at)] = e^{-2s} \frac{a}{s^2 + s^2}.$ We conclude: $\mathcal{L}[u(t-2)\sin(a(t-2))] = e^{-2s} \frac{d}{a^2+a^2}$. \triangleleft Example

・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・

Compute $\mathcal{L}[e^{3t} \sin(at)]$.

Example Compute $\mathcal{L}[u(t-2)\sin(a(t-2))]$. Solution: $\mathcal{L}[\sin(at)] = \frac{a}{s^2 + a^2}$, $\mathcal{L}[u(t-c)f(t-c)] = e^{-cs}\mathcal{L}[f(t)]$. $\mathcal{L}[u(t-2)\sin(a(t-2))] = e^{-2s} \mathcal{L}[\sin(at)] = e^{-2s} \frac{a}{s^2 + a^2}.$ We conclude: $\mathcal{L}[u(t-2)\sin(a(t-2))] = e^{-2s} \frac{d}{a^2+a^2}$. \triangleleft Example Compute $\mathcal{L}[e^{3t} \sin(at)]$. Solution: Recall: $\mathcal{L}[e^{ct}f(t)] = \mathcal{L}[f](s-c)$.

◆□▶ ◆□▶ ◆三▶ ◆三▶ ◆□▶ ◆□

Example Compute $\mathcal{L}[u(t-2)\sin(a(t-2))]$. Solution: $\mathcal{L}[\sin(at)] = \frac{a}{s^2 + a^2}$, $\mathcal{L}[u(t-c)f(t-c)] = e^{-cs}\mathcal{L}[f(t)]$. $\mathcal{L}[u(t-2)\sin(a(t-2))] = e^{-2s} \mathcal{L}[\sin(at)] = e^{-2s} \frac{a}{s^2 + a^2}.$ We conclude: $\mathcal{L}[u(t-2)\sin(a(t-2))] = e^{-2s} \frac{d}{a^2+a^2}$. \triangleleft Example Compute $\mathcal{L}[e^{3t} \sin(at)]$. Solution: Recall: $\mathcal{L}[e^{ct}f(t)] = \mathcal{L}[f](s-c), \quad \mathcal{L}[\sin(at)] = \frac{a}{s^2 + a^2}.$

◆□▶ ◆□▶ ◆三▶ ◆三▶ 三三 のへ⊙

Example Compute $\mathcal{L}[u(t-2)\sin(a(t-2))]$. Solution: $\mathcal{L}[\sin(at)] = \frac{a}{s^2 + a^2}$, $\mathcal{L}[u(t-c)f(t-c)] = e^{-cs}\mathcal{L}[f(t)]$. $\mathcal{L}[u(t-2)\sin(a(t-2))] = e^{-2s} \mathcal{L}[\sin(at)] = e^{-2s} \frac{a}{s^2 + s^2}.$ We conclude: $\mathcal{L}[u(t-2)\sin(a(t-2))] = e^{-2s} \frac{d}{s^2+a^2}$. \triangleleft Example Compute $\mathcal{L}[e^{3t} \sin(at)]$. Solution: Recall: $\mathcal{L}[e^{ct}f(t)] = \mathcal{L}[f](s-c), \quad \mathcal{L}[\sin(at)] = \frac{a}{c^2 + a^2}.$ We conclude: $\mathcal{L}[e^{3t} \sin(at)] = \frac{a}{(s-3)^2 + a^2}$, with s > 3. \triangleleft

◆□▶ ◆□▶ ◆三▶ ◆三▶ 三三 のへぐ

Example

Find the Laplace transform of
$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ (t^2 - 2t + 2), & t \ge 1. \end{cases}$$

Example

Find the Laplace transform of
$$f(t) = egin{cases} 0, & t < 1, \ (t^2 - 2t + 2), & t \geqslant 1. \end{cases}$$

◆□▶ ◆□▶ ◆臣▶ ◆臣▶ 三臣 - のへぐ

Solution: Using step function notation,

Example

Find the Laplace transform of
$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ (t^2 - 2t + 2), & t \ge 1. \end{cases}$$

Solution: Using step function notation,

$$f(t) = u(t-1)(t^2-2t+2).$$

◆□▶ ◆□▶ ◆臣▶ ◆臣▶ 三臣 - のへぐ

Example

Find the Laplace transform of
$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ (t^2 - 2t + 2), & t \ge 1. \end{cases}$$

Solution: Using step function notation,

$$f(t) = u(t-1)(t^2-2t+2).$$

◆□▶ ◆□▶ ◆□▶ ◆□▶ □□ のへぐ

Completing the square we obtain,

$$t^2 - 2t + 2 = (t^2 - 2t + 1) - 1 + 2$$

Example

Find the Laplace transform of
$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ (t^2 - 2t + 2), & t \ge 1. \end{cases}$$

Solution: Using step function notation,

$$f(t) = u(t-1)(t^2-2t+2).$$

Completing the square we obtain,

$$t^{2} - 2t + 2 = (t^{2} - 2t + 1) - 1 + 2 = (t - 1)^{2} + 1.$$

◆□▶ ◆□▶ ◆□▶ ◆□▶ □□ のへぐ

Example

Find the Laplace transform of
$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ (t^2 - 2t + 2), & t \ge 1. \end{cases}$$

Solution: Using step function notation,

$$f(t) = u(t-1)(t^2-2t+2).$$

Completing the square we obtain,

$$t^{2} - 2t + 2 = (t^{2} - 2t + 1) - 1 + 2 = (t - 1)^{2} + 1.$$

◆□▶ ◆□▶ ◆三▶ ◆三▶ 三三 のへぐ

This is a parabola t^2 translated to the right by 1 and up by one.

Example

Find the Laplace transform of
$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ (t^2 - 2t + 2), & t \ge 1. \end{cases}$$

Solution: Using step function notation,

$$f(t) = u(t-1)(t^2-2t+2).$$

Completing the square we obtain,

$$t^{2} - 2t + 2 = (t^{2} - 2t + 1) - 1 + 2 = (t - 1)^{2} + 1.$$

・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・

This is a parabola t^2 translated to the right by 1 and up by one. Because of the step function, this is a discontinuous function at t = 1.

Example

Find the Laplace transform of
$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ (t^2 - 2t + 2), & t \ge 1. \end{cases}$$

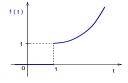
Solution: Using step function notation,

$$f(t) = u(t-1)(t^2-2t+2).$$

Completing the square we obtain,

$$t^{2} - 2t + 2 = (t^{2} - 2t + 1) - 1 + 2 = (t - 1)^{2} + 1.$$

This is a parabola t^2 translated to the right by 1 and up by one. Because of the step function, this is a discontinuous function at t = 1.



・ロト ・ 雪 ト ・ ヨ ト

590

- 10

Example

Find the Laplace transform of $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ (t^2 - 2t + 2), & t \ge 1. \end{cases}$

Solution: Recall: $f(t) = u(t-1)[(t-1)^2 + 1]$.

Example

Find the Laplace transform of $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ (t^2 - 2t + 2), & t \ge 1. \end{cases}$

Solution: Recall: $f(t) = u(t-1)[(t-1)^2 + 1]$.

This is equivalent to

$$f(t) = u(t-1)(t-1)^2 + u(t-1).$$

Example

Find the Laplace transform of $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ (t^2 - 2t + 2), & t \ge 1. \end{cases}$

Solution: Recall: $f(t) = u(t-1)[(t-1)^2 + 1]$.

This is equivalent to

$$f(t) = u(t-1)(t-1)^2 + u(t-1).$$

・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・

Since $\mathcal{L}[t^2] = 2/s^3$,

Example

Find the Laplace transform of $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ (t^2 - 2t + 2), & t \ge 1. \end{cases}$

Solution: Recall: $f(t) = u(t-1)[(t-1)^2 + 1]$.

This is equivalent to

$$f(t) = u(t-1)(t-1)^2 + u(t-1).$$

・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・

Since $\mathcal{L}[t^2] = 2/s^3$, and $\mathcal{L}[u(t-c)g(t-c)] = e^{-cs} \mathcal{L}[g(t)]$,

Example

Find the Laplace transform of $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ (t^2 - 2t + 2), & t \ge 1. \end{cases}$

Solution: Recall: $f(t) = u(t-1)[(t-1)^2 + 1]$.

This is equivalent to

$$f(t) = u(t-1)(t-1)^2 + u(t-1).$$

Since $\mathcal{L}[t^2] = 2/s^3$, and $\mathcal{L}[u(t-c)g(t-c)] = e^{-cs} \mathcal{L}[g(t)]$, then

・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・

 $\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[u(t-1)(t-1)^2] + \mathcal{L}[u(t-1)]$

Example

Find the Laplace transform of $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ (t^2 - 2t + 2), & t \ge 1. \end{cases}$

Solution: Recall: $f(t) = u(t-1)[(t-1)^2 + 1]$.

This is equivalent to

$$f(t) = u(t-1)(t-1)^2 + u(t-1).$$

Since $\mathcal{L}[t^2] = 2/s^3$, and $\mathcal{L}[u(t-c)g(t-c)] = e^{-cs} \mathcal{L}[g(t)]$, then

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[u(t-1)(t-1)^2] + \mathcal{L}[u(t-1)] = e^{-s}\frac{2}{s^3} + e^{-s}\frac{1}{s}.$$

・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・

Example

Find the Laplace transform of $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ (t^2 - 2t + 2), & t \ge 1. \end{cases}$

Solution: Recall: $f(t) = u(t-1)[(t-1)^2 + 1]$.

This is equivalent to

$$f(t) = u(t-1)(t-1)^2 + u(t-1).$$

Since $\mathcal{L}[t^2] = 2/s^3$, and $\mathcal{L}[u(t-c)g(t-c)] = e^{-cs} \mathcal{L}[g(t)]$, then

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[u(t-1)(t-1)^2] + \mathcal{L}[u(t-1)] = e^{-s}\frac{2}{s^3} + e^{-s}\frac{1}{s}.$$

We conclude: $\mathcal{L}[f(t)] = \frac{e^{-s}}{s^3} (2+s^2).$

Remark: The inverse of the formulas in the Theorem above are:

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-cs}F(s)] = u(t-c)f(t-c),$$

▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□ ▶ ④ ●

Remark: The inverse of the formulas in the Theorem above are:

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-cs}F(s)] = u(t-c)f(t-c),$$

 $\mathcal{L}^{-1}[F(s-c)] = e^{ct} f(t).$

▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□ ▶ ④ ●

Remark: The inverse of the formulas in the Theorem above are:

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-cs}F(s)] = u(t-c)f(t-c),$$
$$\mathcal{L}^{-1}[F(s-c)] = e^{ct}f(t).$$

◆□▶ ◆□▶ ◆臣▶ ◆臣▶ 三臣 - のへぐ

Example

Find
$$\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{e^{-4s}}{s^2+9}\Big].$$

Remark: The inverse of the formulas in the Theorem above are:

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-cs}F(s)] = u(t-c)f(t-c),$$

 $\mathcal{L}^{-1}[F(s-c)] = e^{ct}f(t).$

Example

Find $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{e^{-4s}}{s^2 + 9} \right]$. Solution: $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{e^{-4s}}{s^2 + 9} \right] = \frac{1}{3} \mathcal{L}^{-1} \left[e^{-4s} \frac{3}{s^2 + 9} \right]$.

Remark: The inverse of the formulas in the Theorem above are:

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-cs}F(s)] = u(t-c)f(t-c),$$

 $\mathcal{L}^{-1}[F(s-c)] = e^{ct}f(t).$

Example

Find $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{e^{-4s}}{s^2 + 9} \right]$. Solution: $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{e^{-4s}}{s^2 + 9} \right] = \frac{1}{3} \mathcal{L}^{-1} \left[e^{-4s} \frac{3}{s^2 + 9} \right]$.

Recall:
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^2+a^2}\right] = \sin(at).$$

Remark: The inverse of the formulas in the Theorem above are:

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-cs}F(s)] = u(t-c)f(t-c),$$

 $\mathcal{L}^{-1}[F(s-c)] = e^{ct}f(t).$

Example

Find $\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{e^{-4s}}{s^2+9}\Big].$

Solution: $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-4s}}{s^2+9}\right] = \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-4s}\frac{3}{s^2+9}\right].$ Recall: $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^2+a^2}\right] = \sin(at).$ Then, we conclude that $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-4s}}{s^2+9}\right] = \frac{1}{3}u(t-4)\sin(3(t-4)).$

・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・

Example
Find
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s-2)}{(s-2)^2+9}\right]$$
.

Example
Find
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s-2)}{(s-2)^2+9}\right]$$
.
Solution: $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+a^2}\right] = \cos(at)$,

Example
Find
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s-2)}{(s-2)^2+9}\right]$$
.
Solution: $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+a^2}\right] = \cos(at), \ \mathcal{L}^{-1}\left[F(s-c)\right] = e^{ct} f(t)$.

Example
Find
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s-2)}{(s-2)^2+9}\right]$$
.
Solution: $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+a^2}\right] = \cos(at), \ \mathcal{L}^{-1}\left[F(s-c)\right] = e^{ct} f(t)$.
We conclude: $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s-2)}{(s-2)^2+9}\right] = e^{2t} \cos(3t)$.

Example
Find
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s-2)}{(s-2)^2+9}\right]$$
.
Solution: $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+a^2}\right] = \cos(at), \ \mathcal{L}^{-1}\left[F(s-c)\right] = e^{ct} f(t)$.
We conclude: $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s-2)}{(s-2)^2+9}\right] = e^{2t} \cos(3t)$.

◆□▶ ◆□▶ ◆臣▶ ◆臣▶ 臣 の�?

Example

Find
$$\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{2e^{-3s}}{s^2-4}\Big]$$
.

Example
Find
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s-2)}{(s-2)^2+9}\right]$$
.
Solution: $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+a^2}\right] = \cos(at), \ \mathcal{L}^{-1}\left[F(s-c)\right] = e^{ct} f(t)$.
We conclude: $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s-2)}{(s-2)^2+9}\right] = e^{2t} \cos(3t)$.

▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□ ▶ ④ ●

Example

Find
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2e^{-3s}}{s^2-4}\right]$$
.

Solution: Recall: $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^2-a^2}\right] = \sinh(at)$

Example
Find
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s-2)}{(s-2)^2+9}\right]$$
.
Solution: $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+a^2}\right] = \cos(at), \ \mathcal{L}^{-1}\left[F(s-c)\right] = e^{ct} f(t)$.
We conclude: $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s-2)}{(s-2)^2+9}\right] = e^{2t} \cos(3t)$.

Example

Find
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2e^{-3s}}{s^2-4}\right]$$

Solution: Recall: $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^2-a^2}\right] = \sinh(at)$ and $\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-cs}F(s)\right] = u(t-c)f(t-c).$

Example
Find
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2e^{-3s}}{s^2-4}\right]$$
.

Solution: Recall:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^2-a^2}\right] = \sinh(at), \quad \mathcal{L}^{-1}\left[e^{-cs}F(s)\right] = u(t-c)f(t-c).$$

◆□▶ ◆□▶ ◆三▶ ◆三▶ 三三 - つへぐ

Example
Find
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2e^{-3s}}{s^2-4}\right]$$
.

Solution: Recall:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^2-a^2}\right] = \sinh(at), \quad \mathcal{L}^{-1}\left[e^{-cs}F(s)\right] = u(t-c)f(t-c).$$

$$\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{2e^{-3s}}{s^2-4}\Big] = \mathcal{L}^{-1}\Big[e^{-3s}\,\frac{2}{s^2-4}\Big].$$

◆□▶ ◆□▶ ◆三▶ ◆三▶ 三三 - つへぐ

Example
Find
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2e^{-3s}}{s^2-4}\right]$$
.

Solution: Recall:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^2-a^2}\right] = \sinh(at), \quad \mathcal{L}^{-1}\left[e^{-cs}F(s)\right] = u(t-c)f(t-c).$$

$$\mathcal{L}^{-1}\Big[rac{2e^{-3s}}{s^2-4}\Big] = \mathcal{L}^{-1}\Big[e^{-3s}\,rac{2}{s^2-4}\Big].$$

We conclude: $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2e^{-3s}}{s^2-4}\right] = u(t-3)\sinh(2(t-3)).$

- ロ ト - 4 回 ト - 4 □ - 4

▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□ ▶ ④ ●

Example Find $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s^2+s-2}\right]$.

Example

Find
$$\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{e^{-2s}}{s^2+s-2}\Big].$$

Solution: Find the roots of the denominator:

$$s_{\pm}=rac{1}{2}ig[-1\pm\sqrt{1+8}ig]$$

▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□ ▶ ④ ●

Example

Find
$$\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{e^{-2s}}{s^2+s-2}\Big].$$

Solution: Find the roots of the denominator:

$$s_{\pm} = rac{1}{2} igl[-1 \pm \sqrt{1+8} igr] \quad \Rightarrow \quad \left\{ egin{array}{l} s_+ = 1, \ s_- = -2. \end{array}
ight.$$

▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□ ▶ ④ ●

Example

Find
$$\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{e^{-2s}}{s^2+s-2}\Big].$$

Solution: Find the roots of the denominator:

$$s_{\pm} = rac{1}{2} igl[-1 \pm \sqrt{1+8} igr] \quad \Rightarrow \quad \left\{ egin{array}{l} s_+ = 1, \ s_- = -2. \end{array}
ight.$$

◆□▶ ◆□▶ ◆三▶ ◆三▶ 三三 のへぐ

Therefore, $s^2 + s - 2 = (s - 1)(s + 2)$.

Example

Find
$$\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{e^{-2s}}{s^2+s-2}\Big].$$

Solution: Find the roots of the denominator:

$$s_{\pm} = rac{1}{2} igl[-1 \pm \sqrt{1+8} igr] \quad \Rightarrow \quad \left\{ egin{array}{l} s_+ = 1, \ s_- = -2. \end{array}
ight.$$

Therefore, $s^2 + s - 2 = (s - 1)(s + 2)$.

Use partial fractions to simplify the rational function:

$$\frac{1}{s^2 + s - 2} = \frac{1}{(s - 1)(s + 2)}$$

Example

Find
$$\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{e^{-2s}}{s^2+s-2}\Big].$$

Solution: Find the roots of the denominator:

$$s_{\pm} = rac{1}{2} igl[-1 \pm \sqrt{1+8} igr] \quad \Rightarrow \quad \left\{ egin{array}{l} s_+ = 1, \ s_- = -2. \end{array}
ight.$$

Therefore, $s^2 + s - 2 = (s - 1)(s + 2)$.

Use partial fractions to simplify the rational function:

$$rac{1}{s^2+s-2} = rac{1}{(s-1)\,(s+2)} = rac{a}{(s-1)} + rac{b}{(s+2)},$$

Example

Find
$$\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{e^{-2s}}{s^2+s-2}\Big].$$

Solution: Find the roots of the denominator:

$$s_{\pm} = rac{1}{2} igl[-1 \pm \sqrt{1+8} igr] \quad \Rightarrow \quad \left\{ egin{array}{l} s_+ = 1, \ s_- = -2. \end{array}
ight.$$

Therefore, $s^2 + s - 2 = (s - 1)(s + 2)$.

Use partial fractions to simplify the rational function:

$$\frac{1}{s^2 + s - 2} = \frac{1}{(s - 1)(s + 2)} = \frac{a}{(s - 1)} + \frac{b}{(s + 2)},$$
$$\frac{1}{s^2 + s - 2} = a(s + 2) + b(s - 1)$$

- ロ ト - 4 回 ト - 4 □ - 4

Example

Find
$$\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{e^{-2s}}{s^2+s-2}\Big].$$

Solution: Find the roots of the denominator:

$$s_{\pm} = rac{1}{2} igl[-1 \pm \sqrt{1+8} igr] \quad \Rightarrow \quad \left\{ egin{array}{l} s_+ = 1, \ s_- = -2. \end{array}
ight.$$

Therefore, $s^2 + s - 2 = (s - 1)(s + 2)$.

Use partial fractions to simplify the rational function:

$$\frac{1}{s^2 + s - 2} = \frac{1}{(s - 1)(s + 2)} = \frac{a}{(s - 1)} + \frac{b}{(s + 2)},$$
$$\frac{1}{s^2 + s - 2} = a(s + 2) + b(s - 1) = \frac{(a + b)s + (2a - b)}{(s - 1)(s + 2)}.$$

(ロ)、(型)、(E)、(E)、 E) のQ(C)

Example Find $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s^2+s-2}\right]$. Solution: Recall: $\frac{1}{s^2+s-2} = \frac{(a+b)s+(2a-b)}{(s-1)(s+2)}$

・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・

Example Find $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s^2+s-2}\right]$. Solution: Recall: $\frac{1}{s^2+s-2} = \frac{(a+b)s+(2a-b)}{(s-1)(s+2)}$

・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・

a+b=0,

Example Find $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s^2+s-2}\right]$. Solution: Recall: $\frac{1}{s^2+s-2} = \frac{(a+b)s+(2a-b)}{(s-1)(s+2)}$

・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・

 $a+b=0, \quad 2a-b=1,$

Example
Find
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s^2+s-2}\right]$$
.
Solution: Recall: $\frac{1}{s^2+s-2} = \frac{(a+b)s+(2a-b)}{(s-1)(s+2)}$
 $a+b=0, \quad 2a-b=1, \quad \Rightarrow \quad a=\frac{1}{3}, \quad b=-\frac{1}{3}.$

◆□▶ ◆□▶ ◆臣▶ ◆臣▶ 臣 の�?

Example Find $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s^2+s-2}\right]$. Solution: Recall: $\frac{1}{s^2+s-2} = \frac{(a+b)s+(2a-b)}{(s-1)(s+2)}$ $a+b=0, \quad 2a-b=1, \quad \Rightarrow \quad a=\frac{1}{3}, \quad b=-\frac{1}{3}.$ $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s^2+s-2}\right] = \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-2s}\frac{1}{s-1}\right] - \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-2s}\frac{1}{s+2}\right].$

Example Find $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s^2+s-2}\right]$. Solution: Recall: $\frac{1}{s^2 + s - 2} = \frac{(a+b)s + (2a-b)}{(s-1)(s+2)}$ $a+b=0, \quad 2a-b=1, \quad \Rightarrow \quad a=\frac{1}{2}, \quad b=-\frac{1}{2}.$ $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{e^2+e^{-2s}}\right] = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-2s}\frac{1}{e^{-1}}\right] - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-2s}\frac{1}{e^{-2s}}\right].$ Recall: $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{e^{-t}}\right] = e^{at}$,

▲ロト ▲母 ト ▲目 ト ▲目 ト → 目 → のへで

Example Find $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s^2+s-2}\right]$. Solution: Recall: $\frac{1}{s^2 + s - 2} = \frac{(a+b)s + (2a-b)}{(s-1)(s+2)}$ $a+b=0, \quad 2a-b=1, \quad \Rightarrow \quad a=\frac{1}{2}, \quad b=-\frac{1}{2}.$ $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{e^2 + c}\right] = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-2s}\frac{1}{c-1}\right] - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-2s}\frac{1}{c+2}\right].$ Recall: $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{c}\right] = e^{at}$, $\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-cs}F(s)\right] = u(t-c)f(t-c)$,

▲ロト ▲母 ト ▲目 ト ▲目 ト → 目 → のへで

Example Find $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s^2+s}\right]$. Solution: Recall: $\frac{1}{s^2 + s - 2} = \frac{(a+b)s + (2a-b)}{(s-1)(s+2)}$ $a+b=0, \quad 2a-b=1, \quad \Rightarrow \quad a=\frac{1}{2}, \quad b=-\frac{1}{2}.$ $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s^2+s-2}\right] = \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-2s}\frac{1}{s-1}\right] - \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-2s}\frac{1}{s+2}\right].$ Recall: $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{c}\right] = e^{at}$, $\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-cs}F(s)\right] = u(t-c)f(t-c)$, - - - 25 - 1

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s^2+s-2}\right] = \frac{1}{3} u(t-2) e^{(t-2)} - \frac{1}{3} u(t-2) e^{-2(t-2)}.$$

▲□▶ ▲圖▶ ▲≣▶ ▲≣▶ = 差 = 釣�?

Example Find $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s^2+s-2}\right]$. Solution: Recall: $\frac{1}{s^2 + s - 2} = \frac{(a+b)s + (2a-b)}{(s-1)(s+2)}$ $a+b=0, \quad 2a-b=1, \quad \Rightarrow \quad a=\frac{1}{2}, \quad b=-\frac{1}{2}.$ $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{c^2+c-2}\right] = \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-2s}\frac{1}{c-1}\right] - \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-2s}\frac{1}{c+2}\right].$ Recall: $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{c}\right] = e^{at}$, $\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-cs}F(s)\right] = u(t-c)f(t-c)$, $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{c^2+c-2}\right] = \frac{1}{3}u(t-2)e^{(t-2)} - \frac{1}{3}u(t-2)e^{-2(t-2)}.$ Hence: $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s^2+s-2}\right] = \frac{1}{2}u(t-2)\left[e^{(t-2)}-e^{-2(t-2)}\right].$

◆□ > ◆□ > ◆豆 > ◆豆 > 「豆 」のへで

The Laplace Transform of step functions (Sect. 4.3).

Last Lecture

- Overview and notation.
- The definition of a step function.
- Piecewise discontinuous functions.
- ► The Laplace Transform of discontinuous functions.
- Properties of the Laplace Transform.

This Lecture

Differential equations with discontinuous sources.

◆□▶ ◆□▶ ◆□▶ ◆□▶ → □ ◇ ◇ ◇

Equations with discontinuous sources (Sect. 4.3).

- Differential equations with discontinuous sources.
- We solve the IVPs:

(a) Example 1:

$$y' + 2y = u(t - 4), \qquad y(0) = 3.$$

(b) Example 2:

$$y''+y'+rac{5}{4}y=b(t), \quad egin{array}{cc} y(0)=0, \ y'(0)=0, \ y'(0)=0, \ \end{array} b(t)= egin{cases} 1, & t\in[0,\pi) \ 0, & t\in[\pi,\infty). \end{array}$$

(c) Example 3:

$$y''+y'+rac{5}{4}y=g(t), \ \ y(0)=0, \ \ g(t)=\begin{cases} \sin(t), & t\in[0,\pi) \\ 0, & t\in[\pi,\infty). \end{cases}$$

▲□▶ ▲圖▶ ▲国▶ ▲国▶ ▲国 ● ● ●

Equations with discontinuous sources (Sect. 4.3).

- Differential equations with discontinuous sources.
- We solve the IVPs:
 - (a) **Example 1**:

$$y' + 2y = u(t - 4), \qquad y(0) = 3.$$

(b) Example 2:

$$y''+y'+rac{5}{4}y=b(t), \quad egin{array}{cc} y(0)=0, \ y'(0)=0, \ y'(0)=0, \ \end{array} b(t)= egin{cases} 1, & t\in[0,\pi) \ 0, & t\in[\pi,\infty). \end{array}$$

(c) Example 3:

$$y''+y'+rac{5}{4}y=g(t), \ \ y(0)=0, \ \ g(t)= \begin{cases} \sin(t), & t\in[0,\pi) \\ 0, & t\in[\pi,\infty). \end{cases}$$

▲□▶ ▲圖▶ ▲国▶ ▲国▶ ▲国 ● ● ●

Differential equations with discontinuous sources.

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y' + 2y = u(t - 4), \qquad y(0) = 3.$$

▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□ ▶ ④ ●

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y' + 2y = u(t - 4), \qquad y(0) = 3.$$

・ロト・日本・モート モー うへで

Solution: Compute the Laplace transform of the whole equation,

$$\mathcal{L}[y'] + 2\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[u(t-4)]$$

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y' + 2y = u(t - 4), \qquad y(0) = 3.$$

Solution: Compute the Laplace transform of the whole equation,

$$\mathcal{L}[y']+2\mathcal{L}[y]=\mathcal{L}[u(t-4)]=\frac{e^{-4s}}{s}.$$

・ロト・日本・モート モー うへで

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y' + 2y = u(t - 4), \qquad y(0) = 3.$$

Solution: Compute the Laplace transform of the whole equation,

$$\mathcal{L}[y']+2\mathcal{L}[y]=\mathcal{L}[u(t-4)]=\frac{e^{-4s}}{s}.$$

- ロ ト - 4 回 ト - 4 □ - 4

From the previous Section we know that

$$\left[s\,\mathcal{L}[y]-y(0)\right]+2\,\mathcal{L}[y]=\frac{e^{-4s}}{s}$$

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y' + 2y = u(t - 4), \qquad y(0) = 3.$$

Solution: Compute the Laplace transform of the whole equation,

$$\mathcal{L}[y']+2\mathcal{L}[y]=\mathcal{L}[u(t-4)]=\frac{e^{-4s}}{s}.$$

From the previous Section we know that

$$\left[s\mathcal{L}[y] - y(0)\right] + 2\mathcal{L}[y] = \frac{e^{-4s}}{s} \quad \Rightarrow \quad (s+2)\mathcal{L}[y] = y(0) + \frac{e^{-4s}}{s}$$

◆□ ▶ ◆□ ▶ ◆ □ ▶ ◆ □ ▶ ● ● ● ● ● ●

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y' + 2y = u(t - 4), \qquad y(0) = 3.$$

Solution: Compute the Laplace transform of the whole equation,

$$\mathcal{L}[y']+2\mathcal{L}[y]=\mathcal{L}[u(t-4)]=\frac{e^{-4s}}{s}.$$

From the previous Section we know that

$$\left[s\mathcal{L}[y] - y(0)\right] + 2\mathcal{L}[y] = \frac{e^{-4s}}{s} \quad \Rightarrow \quad (s+2)\mathcal{L}[y] = y(0) + \frac{e^{-4s}}{s}$$

◆□▶ ◆□▶ ◆三▶ ◆三▶ 三三 のへぐ

Introduce the initial condition,

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y' + 2y = u(t - 4), \qquad y(0) = 3.$$

Solution: Compute the Laplace transform of the whole equation,

$$\mathcal{L}[y']+2\mathcal{L}[y]=\mathcal{L}[u(t-4)]=\frac{e^{-4s}}{s}.$$

From the previous Section we know that

$$\left[s\,\mathcal{L}[y]-y(0)\right]+2\,\mathcal{L}[y]=\frac{e^{-4s}}{s}\quad\Rightarrow\quad (s+2)\,\mathcal{L}[y]=y(0)+\frac{e^{-4s}}{s}.$$

Introduce the initial condition, $\mathcal{L}[y] = \frac{3}{(s+2)} + e^{-4s} \frac{1}{s(s+2)}$,

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y' + 2y = u(t - 4), \qquad y(0) = 3.$$

Solution: Compute the Laplace transform of the whole equation,

$$\mathcal{L}[y']+2\mathcal{L}[y]=\mathcal{L}[u(t-4)]=\frac{e^{-4s}}{s}.$$

From the previous Section we know that

$$\left[s\mathcal{L}[y]-y(0)\right]+2\mathcal{L}[y]=\frac{e^{-4s}}{s} \quad \Rightarrow \quad (s+2)\mathcal{L}[y]=y(0)+\frac{e^{-4s}}{s}.$$

Introduce the initial condition, $\mathcal{L}[y] = \frac{3}{(s+2)} + e^{-4s} \frac{1}{s(s+2)}$, Use the table: $\mathcal{L}[y] = 3\mathcal{L}[e^{-2t}] + e^{-4s} \frac{1}{s(s+2)}$.

(日) (同) (三) (三) (三) (○) (○)

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y' + 2y = u(t - 4),$$
 $y(0) = 3.$
Solution: Recall: $\mathcal{L}[y] = 3\mathcal{L}[e^{-2t}] + e^{-4s}\frac{1}{s(s + 2)}.$

(ロ)、(型)、(E)、(E)、(E)、(O)へ(C)

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y' + 2y = u(t - 4), \qquad y(0) = 3.$$

- ロ ト - 4 回 ト - 4 □ - 4

Solution: Recall: $\mathcal{L}[y] = 3\mathcal{L}[e^{-2t}] + e^{-4s} \frac{1}{s(s+2)}$.

We need to invert the Laplace transform on the last term.

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y' + 2y = u(t - 4), \qquad y(0) = 3.$$

- ロ ト - 4 回 ト - 4 □ - 4

Solution: Recall: $\mathcal{L}[y] = 3\mathcal{L}[e^{-2t}] + e^{-4s} \frac{1}{s(s+2)}$.

We need to invert the Laplace transform on the last term. Partial fractions:

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y' + 2y = u(t - 4), \qquad y(0) = 3.$$

- ロ ト - 4 回 ト - 4 □ - 4

Solution: Recall: $\mathcal{L}[y] = 3\mathcal{L}[e^{-2t}] + e^{-4s} \frac{1}{s(s+2)}$.

We need to invert the Laplace transform on the last term. Partial fractions:

$$\frac{1}{s(s+2)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{(s+2)}$$

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y' + 2y = u(t - 4), \qquad y(0) = 3.$$

- ロ ト - 4 回 ト - 4 □ - 4

Solution: Recall: $\mathcal{L}[y] = 3\mathcal{L}[e^{-2t}] + e^{-4s} \frac{1}{s(s+2)}$.

We need to invert the Laplace transform on the last term. Partial fractions:

$$\frac{1}{s(s+2)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{(s+2)} = \frac{a(s+2) + bs}{s(s+2)}$$

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y' + 2y = u(t - 4), \qquad y(0) = 3.$$

Solution: Recall: $\mathcal{L}[y] = 3\mathcal{L}[e^{-2t}] + e^{-4s} \frac{1}{s(s+2)}$.

We need to invert the Laplace transform on the last term. Partial fractions:

$$\frac{1}{s(s+2)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{(s+2)} = \frac{a(s+2) + bs}{s(s+2)} = \frac{(a+b)s + (2a)}{s(s+2)}$$

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y' + 2y = u(t - 4), \qquad y(0) = 3.$$

Solution: Recall: $\mathcal{L}[y] = 3\mathcal{L}[e^{-2t}] + e^{-4s} \frac{1}{s(s+2)}$.

We need to invert the Laplace transform on the last term. Partial fractions:

$$\frac{1}{s(s+2)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{(s+2)} = \frac{a(s+2) + bs}{s(s+2)} = \frac{(a+b)s + (2a)}{s(s+2)}$$

- ロ ト - 4 回 ト - 4 □ - 4

We get, a + b = 0, 2a = 1.

Example

V

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y' + 2y = u(t - 4), \qquad y(0) = 3.$$

Solution: Recall: $\mathcal{L}[y] = 3\mathcal{L}[e^{-2t}] + e^{-4s} \frac{1}{s(s+2)}$.

We need to invert the Laplace transform on the last term. Partial fractions:

$$\frac{1}{s(s+2)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{(s+2)} = \frac{a(s+2) + bs}{s(s+2)} = \frac{(a+b)s + (2a)}{s(s+2)}$$

We get, $a+b=0$, $2a=1$. We obtain: $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$.

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y' + 2y = u(t - 4), \qquad y(0) = 3.$$

Solution: Recall: $\mathcal{L}[y] = 3\mathcal{L}[e^{-2t}] + e^{-4s} \frac{1}{s(s+2)}$.

We need to invert the Laplace transform on the last term. Partial fractions:

$$\frac{1}{s(s+2)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{(s+2)} = \frac{a(s+2) + bs}{s(s+2)} = \frac{(a+b)s + (2a)}{s(s+2)}$$

We get, a + b = 0, 2a = 1. We obtain: $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$. Hence,

$$\frac{1}{s(s+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+2)} \right].$$

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□ ▶ ④ ●

$$y' + 2y = u(t - 4),$$
 $y(0) = 3.$
Solution: Recall: $\frac{1}{s(s + 2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{(s + 2)} \right].$

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y' + 2y = u(t - 4), \qquad y(0) = 3.$$

Solution: Recall: $\frac{1}{s(s+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+2)} \right].$

The algebraic equation for $\mathcal{L}[y]$ has the form,

$$\mathcal{L}[y] = 3\mathcal{L}[e^{-2t}] + \frac{1}{2}\left[e^{-4s}\frac{1}{s} - e^{-4s}\frac{1}{(s+2)}\right].$$

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y' + 2y = u(t - 4), \qquad y(0) = 3.$$

Solution: Recall: $\frac{1}{s(s+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+2)} \right].$

The algebraic equation for $\mathcal{L}[y]$ has the form,

$$\mathcal{L}[y] = 3\mathcal{L}[e^{-2t}] + \frac{1}{2}\left[e^{-4s}\frac{1}{s} - e^{-4s}\frac{1}{(s+2)}\right].$$

$$\mathcal{L}[y] = 3 \mathcal{L}\left[e^{-2t}\right]$$

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y' + 2y = u(t - 4), \qquad y(0) = 3.$$

Solution: Recall: $\frac{1}{s(s+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+2)} \right].$

The algebraic equation for $\mathcal{L}[y]$ has the form,

$$\mathcal{L}[y] = 3\mathcal{L}[e^{-2t}] + \frac{1}{2}\left[e^{-4s}\frac{1}{s} - e^{-4s}\frac{1}{(s+2)}\right]$$
$$\mathcal{L}[y] = 3\mathcal{L}[e^{-2t}] + \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}[u(t-4)]\right]$$

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y' + 2y = u(t - 4), \qquad y(0) = 3.$$

Solution: Recall: $\frac{1}{s(s+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+2)} \right].$

The algebraic equation for $\mathcal{L}[y]$ has the form,

$$\mathcal{L}[y] = 3\mathcal{L}[e^{-2t}] + \frac{1}{2}\left[e^{-4s}\frac{1}{s} - e^{-4s}\frac{1}{(s+2)}\right].$$

$$\mathcal{L}[y] = 3\mathcal{L}[e^{-2t}] + \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}[u(t-4)] - \mathcal{L}[u(t-4)e^{-2(t-4)}]\right).$$

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y' + 2y = u(t - 4), \qquad y(0) = 3.$$

Solution: Recall: $\frac{1}{s(s+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+2)} \right].$

The algebraic equation for $\mathcal{L}[y]$ has the form,

$$\mathcal{L}[y] = 3\mathcal{L}[e^{-2t}] + \frac{1}{2}\left[e^{-4s}\frac{1}{s} - e^{-4s}\frac{1}{(s+2)}\right].$$

$$\mathcal{L}[y] = 3\mathcal{L}[e^{-2t}] + \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}[u(t-4)] - \mathcal{L}[u(t-4)e^{-2(t-4)}]\right).$$

We conclude that

$$y(t) = 3e^{-2t} + \frac{1}{2}u(t-4)\left[1-e^{-2(t-4)}\right].$$

Equations with discontinuous sources (Sect. 4.3).

- Differential equations with discontinuous sources.
- We solve the IVPs:
 - (a) Example 1:

$$y' + 2y = u(t - 4), \qquad y(0) = 3.$$

(b) Example 2:

$$y'' + y' + \frac{5}{4}y = b(t), \quad \begin{array}{l} y(0) = 0, \\ y'(0) = 0, \end{array} \quad b(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \pi) \\ 0, & t \in [\pi, \infty). \end{cases}$$
(c) Example 3:

・ロト ・雪ト ・ヨト ・ヨー うへぐ

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}\,y=b(t), \hspace{0.5cm} egin{array}{cc} y(0)=0, \ y'(0)=0, \end{array} b(t)= egin{cases} 1, & t\in [0,\pi) \ 0, & t\in [\pi,\infty). \end{array}$$

▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□ ▶ ④ ●

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}y=b(t), \hspace{0.5cm} y(0)=0, \ y'(0)=0, \hspace{0.5cm} b(t)= egin{cases} 1, & t\in [0,\pi)\ 0, & t\in [\pi,\infty). \end{cases}$$

Solution:

Rewrite the source function using step functions.

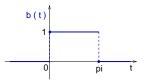
Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}y=b(t), \hspace{0.5cm} y(0)=0, \ y'(0)=0, \hspace{0.5cm} b(t)= egin{cases} 1, & t\in [0,\pi)\ 0, & t\in [\pi,\infty). \end{cases}$$

Solution:

Rewrite the source function using step functions.



▲ロト ▲帰 ト ▲ヨト ▲ヨト 三三 - のへぐ

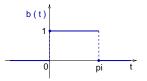
Example

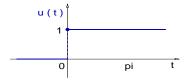
Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}\,y=b(t), \hspace{0.5cm} egin{array}{cc} y(0)=0, \ y'(0)=0, \end{array} b(t)= egin{cases} 1, & t\in [0,\pi) \ 0, & t\in [\pi,\infty). \end{array}$$

Solution:

Rewrite the source function using step functions.





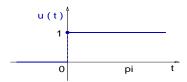
Example

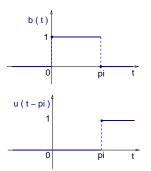
Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}\,y=b(t), \hspace{0.5cm} egin{array}{cc} y(0)=0, \ y'(0)=0, \end{array} b(t)= egin{cases} 1, & t\in [0,\pi) \ 0, & t\in [\pi,\infty). \end{array}$$

Solution:

Rewrite the source function using step functions.





Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}y=b(t), \hspace{1cm} y(0)=0, \ y'(0)=0, \hspace{1cm} b(t)= egin{cases} 1, & t\in [0,\pi)\ 0, & t\in [\pi,\infty). \end{cases}$$

▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□ ▶ ④ ●

Solution: The graphs imply: $b(t) = u(t) - u(t - \pi)$

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}y=b(t), \quad egin{array}{cc} y(0)=0, \ y'(0)=0, \ y'(0)=0, \ \end{array} b(t)= egin{cases} 1, & t\in [0,\pi) \ 0, & t\in [\pi,\infty). \end{array}$$

◆□▶ ◆□▶ ◆三▶ ◆三▶ 三三 のへぐ

Solution: The graphs imply: $b(t) = u(t) - u(t - \pi)$

Now is simple to find $\mathcal{L}[b]$,

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}y=b(t), \hspace{1cm} y(0)=0, \ y'(0)=0, \hspace{1cm} b(t)= egin{cases} 1, & t\in [0,\pi)\ 0, & t\in [\pi,\infty). \end{cases}$$

◆□▶ ◆□▶ ◆三▶ ◆三▶ 三三 のへぐ

Solution: The graphs imply: $b(t) = u(t) - u(t - \pi)$

Now is simple to find $\mathcal{L}[b]$, since

$$\mathcal{L}[b(t)] = \mathcal{L}[u(t)] - \mathcal{L}[u(t-\pi)]$$

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}y=b(t), \hspace{1cm} y(0)=0, \ y'(0)=0, \hspace{1cm} b(t)= egin{cases} 1, & t\in [0,\pi)\ 0, & t\in [\pi,\infty). \end{cases}$$

Solution: The graphs imply: $b(t) = u(t) - u(t - \pi)$

Now is simple to find $\mathcal{L}[b]$, since

$$\mathcal{L}[b(t)] = \mathcal{L}[u(t)] - \mathcal{L}[u(t-\pi)] = \frac{1}{s} - \frac{e^{-\pi s}}{s}.$$

◆□▶ ◆□▶ ◆三▶ ◆三▶ 三三 のへぐ

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}y=b(t), \hspace{1cm} y(0)=0, \ y'(0)=0, \hspace{1cm} b(t)= egin{cases} 1, & t\in [0,\pi)\ 0, & t\in [\pi,\infty). \end{cases}$$

Solution: The graphs imply: $b(t) = u(t) - u(t - \pi)$

Now is simple to find $\mathcal{L}[b]$, since

$$\mathcal{L}[b(t)] = \mathcal{L}[u(t)] - \mathcal{L}[u(t-\pi)] = \frac{1}{s} - \frac{e^{-\pi s}}{s}.$$

- ロ ト - 4 回 ト - 4 □ - 4

So, the source is $\mathcal{L}[b(t)] = (1 - e^{-\pi s}) \frac{1}{s}$,

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}y=b(t), \quad egin{array}{cc} y(0)=0, \ y'(0)=0, \ y'(0)=0, \ \end{array} b(t)= egin{cases} 1, & t\in [0,\pi) \ 0, & t\in [\pi,\infty). \end{array}$$

Solution: The graphs imply: $b(t) = u(t) - u(t - \pi)$

Now is simple to find $\mathcal{L}[b]$, since

$$\mathcal{L}[b(t)] = \mathcal{L}[u(t)] - \mathcal{L}[u(t-\pi)] = \frac{1}{s} - \frac{e^{-\pi s}}{s}.$$

So, the source is $\mathcal{L}[b(t)] = \left(1 - e^{-\pi s}\right) \frac{1}{s}$, and the equation is

$$\mathcal{L}[y''] + \mathcal{L}[y'] + rac{5}{4} \mathcal{L}[y] = \left(1 - e^{-\pi s}\right) rac{1}{s}$$

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y'' + y' + rac{5}{4}y = b(t), \quad egin{array}{c} y(0) = 0, \ y'(0) = 0, \ y'(0) = 0, \ \end{pmatrix} b(t) = egin{cases} 1, & t \in [0,\pi) \ 0, & t \in [\pi,\infty). \end{cases}$$

▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□ ▶ ④ ●

Solution: So:
$$\mathcal{L}[y''] + \mathcal{L}[y'] + \frac{5}{4}\mathcal{L}[y] = (1 - e^{-\pi s})\frac{1}{s}.$$

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}y=b(t), \quad egin{array}{cc} y(0)=0, \ y'(0)=0, \ \end{array} b(t)= egin{cases} 1, & t\in[0,\pi) \ 0, & t\in[\pi,\infty). \end{array}$$

(ロ)、(型)、(E)、(E)、 E、 の(の)

Solution: So:
$$\mathcal{L}[y''] + \mathcal{L}[y'] + \frac{5}{4}\mathcal{L}[y] = (1 - e^{-\pi s})\frac{1}{s}.$$

The initial conditions imply:

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}y=b(t), \quad egin{array}{cc} y(0)=0, \ y'(0)=0, \ y'(0)=0, \ \end{array} b(t)= egin{cases} 1, & t\in [0,\pi) \ 0, & t\in [\pi,\infty). \end{array}$$

▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□ ▶ ④ ●

Solution: So:
$$\mathcal{L}[y''] + \mathcal{L}[y'] + \frac{5}{4}\mathcal{L}[y] = (1 - e^{-\pi s})\frac{1}{s}$$
.

The initial conditions imply: $\mathcal{L}[y''] = s^2 \mathcal{L}[y]$

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y'' + y' + rac{5}{4}y = b(t), \quad egin{array}{c} y(0) = 0, \ y'(0) = 0, \ y'(0) = 0, \ \end{pmatrix} b(t) = egin{cases} 1, & t \in [0,\pi) \ 0, & t \in [\pi,\infty). \end{cases}$$

Solution: So:
$$\mathcal{L}[y''] + \mathcal{L}[y'] + \frac{5}{4}\mathcal{L}[y] = (1 - e^{-\pi s})\frac{1}{s}$$
.

The initial conditions imply: $\mathcal{L}[y''] = s^2 \mathcal{L}[y]$ and $\mathcal{L}[y'] = s \mathcal{L}[y]$.

◆□▶ ◆□▶ ◆三▶ ◆三▶ 三三 のへぐ

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y'' + y' + rac{5}{4}y = b(t), \quad egin{array}{c} y(0) = 0, \ y'(0) = 0, \ y'(0) = 0, \ \end{pmatrix} b(t) = egin{cases} 1, & t \in [0,\pi) \ 0, & t \in [\pi,\infty). \end{cases}$$

Solution: So:
$$\mathcal{L}[y''] + \mathcal{L}[y'] + \frac{5}{4}\mathcal{L}[y] = (1 - e^{-\pi s})\frac{1}{s}.$$

The initial conditions imply: $\mathcal{L}[y''] = s^2 \mathcal{L}[y]$ and $\mathcal{L}[y'] = s \mathcal{L}[y]$.

◆□▶ ◆□▶ ◆三▶ ◆三▶ 三三 のへぐ

Therefore,
$$\left(s^2+s+rac{5}{4}
ight)\mathcal{L}[y]=\left(1-e^{-\pi s}
ight)rac{1}{s}.$$

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y'' + y' + rac{5}{4}y = b(t), \quad egin{array}{c} y(0) = 0, \ y'(0) = 0, \ y'(0) = 0, \ \end{pmatrix} b(t) = egin{cases} 1, & t \in [0,\pi) \ 0, & t \in [\pi,\infty). \end{cases}$$

Solution: So:
$$\mathcal{L}[y''] + \mathcal{L}[y'] + \frac{5}{4}\mathcal{L}[y] = (1 - e^{-\pi s})\frac{1}{s}.$$

The initial conditions imply: $\mathcal{L}[y''] = s^2 \mathcal{L}[y]$ and $\mathcal{L}[y'] = s \mathcal{L}[y]$.

Therefore,
$$\left(s^2+s+rac{5}{4}
ight)\mathcal{L}[y]=\left(1-e^{-\pi s}
ight)rac{1}{s}$$

We arrive at the expression: $\mathcal{L}[y] = \left(1 - e^{-\pi s}\right) rac{1}{s\left(s^2 + s + rac{5}{4}
ight)}.$

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y'' + y' + \frac{5}{4}y = b(t), \quad \begin{array}{l} y(0) = 0, \\ y'(0) = 0, \end{array} \quad b(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \pi) \\ 0, & t \in [\pi, \infty). \end{cases}$$

Solution: Recall: $\mathcal{L}[y] = (1 - e^{-\pi s}) \frac{1}{s\left(s^2 + s + \frac{5}{4}\right)}.$

▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□ ▶ ④ ●

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y'' + y' + \frac{5}{4}y = b(t), \quad \begin{array}{l} y(0) = 0, \\ y'(0) = 0, \end{array} \quad b(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \pi) \\ 0, & t \in [\pi, \infty). \end{cases}$$

Solution: Recall: $\mathcal{L}[y] = (1 - e^{-\pi s}) \frac{1}{s\left(s^2 + s + \frac{5}{4}\right)}.$
Denoting: $H(s) = \frac{1}{s\left(s^2 + s + \frac{5}{4}\right)},$

(ロ)、(型)、(E)、(E)、 E、 の(の)

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y'' + y' + rac{5}{4}y = b(t), \quad egin{array}{c} y(0) = 0, \ y'(0) = 0, \ y'(0) = 0, \end{array} b(t) = egin{cases} 1, & t \in [0,\pi) \ 0, & t \in [\pi,\infty). \end{cases}$$

▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□ ▶ ④ ●

Solution: Recall:
$$\mathcal{L}[y] = (1 - e^{-\pi s}) \frac{1}{s\left(s^2 + s + \frac{5}{4}\right)}$$

Denoting: $H(s) = \frac{1}{s\left(s^2 + s + \frac{5}{4}\right)}$,

we obtain, $\mathcal{L}[y] = (1 - e^{-\pi s}) H(s).$

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}y=b(t), \quad egin{array}{cc} y(0)=0, \ y'(0)=0, \ y'(0)=0, \ \end{array} b(t)= egin{cases} 1, & t\in [0,\pi) \ 0, & t\in [\pi,\infty). \end{array}$$

- ロ ト - 4 回 ト - 4 □ - 4

Solution: Recall:
$$\mathcal{L}[y] = (1 - e^{-\pi s}) \frac{1}{s\left(s^2 + s + \frac{5}{4}\right)}$$

Denoting: $H(s) = \frac{1}{s\left(s^2 + s + \frac{5}{4}\right)}$,

we obtain, $\mathcal{L}[y] = \left(1 - e^{-\pi s}\right) H(s).$

In other words: $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] - \mathcal{L}^{-1}[e^{-\pi s} H(s)].$

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y'' + y' + rac{5}{4}y = b(t), \quad egin{array}{c} y(0) = 0, \ y'(0) = 0, \ y'(0) = 0, \ \end{pmatrix} b(t) = egin{cases} 1, & t \in [0,\pi) \ 0, & t \in [\pi,\infty). \end{cases}$$

< ロ > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □

Solution: Recall: $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] - \mathcal{L}^{-1}[e^{-\pi s} H(s)].$

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y'' + y' + rac{5}{4}y = b(t), \quad egin{array}{c} y(0) = 0, \ y'(0) = 0, \ y'(0) = 0, \ \end{pmatrix} b(t) = egin{cases} 1, & t \in [0,\pi) \ 0, & t \in [\pi,\infty). \end{cases}$$

- ロ ト - 4 回 ト - 4 □ - 4

Solution: Recall: $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] - \mathcal{L}^{-1}[e^{-\pi s} H(s)].$ Denoting: $h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)],$

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}y=b(t), \quad egin{array}{cc} y(0)=0, \ y'(0)=0, \ y'(0)=0, \ \end{array} b(t)= egin{cases} 1, & t\in [0,\pi) \ 0, & t\in [\pi,\infty). \end{array}$$

Solution: Recall: $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] - \mathcal{L}^{-1}[e^{-\pi s} H(s)].$

Denoting: $h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)]$, the $\mathcal{L}[$] properties imply

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-\pi s}H(s)] = u(t-\pi) h(t-\pi).$$

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}y=b(t), \quad egin{array}{cc} y(0)=0, \ y'(0)=0, \ y'(0)=0, \ \end{array} b(t)= egin{cases} 1, & t\in [0,\pi) \ 0, & t\in [\pi,\infty). \end{array}$$

Solution: Recall: $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] - \mathcal{L}^{-1}[e^{-\pi s} H(s)].$

Denoting: $h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)]$, the $\mathcal{L}[$] properties imply

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-\pi s}H(s)] = u(t-\pi) h(t-\pi).$$

Therefore, the solution has the form

$$y(t) = h(t) - u(t - \pi) h(t - \pi).$$

・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}y=b(t), \quad egin{array}{cc} y(0)=0, \ y'(0)=0, \ y'(0)=0, \ \end{array} b(t)= egin{cases} 1, & t\in[0,\pi) \ 0, & t\in[\pi,\infty). \end{array}$$

Solution: Recall: $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] - \mathcal{L}^{-1}[e^{-\pi s} H(s)].$

Denoting: $h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)]$, the $\mathcal{L}[$] properties imply

$$\mathcal{L}^{-1}\big[e^{-\pi s}H(s)\big]=u(t-\pi)\,h(t-\pi).$$

Therefore, the solution has the form

$$y(t) = h(t) - u(t - \pi) h(t - \pi).$$

We only need to find $h(t) = \mathcal{L}^{-1} \Big[\frac{1}{s \left(s^2 + s + \frac{5}{4}\right)} \Big].$

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y'' + y' + \frac{5}{4}y = b(t), \quad \begin{array}{l} y(0) = 0, \\ y'(0) = 0, \end{array} b(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \pi) \\ 0, & t \in [\pi, \infty). \end{cases}$$

Solution: Recall: $h(t) = \mathcal{L}^{-1} \Big[\frac{1}{s \left(s^2 + s + \frac{5}{4}\right)} \Big].$

▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□ ▶ ④ ●

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y'' + y' + \frac{5}{4}y = b(t), \quad \begin{array}{l} y(0) = 0, \\ y'(0) = 0, \end{array} b(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \pi) \\ 0, & t \in [\pi, \infty). \end{cases}$$

Solution: Recall: $h(t) = \mathcal{L}^{-1} \Big[\frac{1}{s \left(s^2 + s + \frac{5}{4}\right)} \Big].$

(ロ)、(型)、(E)、(E)、 E、 の(の)

Partial fractions:

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y'' + y' + \frac{5}{4}y = b(t), \quad \begin{array}{l} y(0) = 0, \\ y'(0) = 0, \end{array} b(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \pi) \\ 0, & t \in [\pi, \infty). \end{cases}$$

Solution: Recall: $h(t) = \mathcal{L}^{-1} \Big[\frac{1}{s \left(s^2 + s + \frac{5}{4}\right)} \Big].$

Partial fractions: Find the zeros of the denominator,

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y'' + y' + \frac{5}{4}y = b(t), \quad \begin{array}{l} y(0) = 0, \\ y'(0) = 0, \end{array} \quad b(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \pi) \\ 0, & t \in [\pi, \infty). \end{cases}$$

Solution: Recall: $h(t) = \mathcal{L}^{-1} \Big[\frac{1}{s\left(s^2 + s + \frac{5}{4}\right)} \Big].$

< □ > < 同 > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > <

Partial fractions: Find the zeros of the denominator,

$$s_{\pm}=rac{1}{2}ig[-1\pm\sqrt{1-5}ig]$$

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y'' + y' + \frac{5}{4}y = b(t), \quad \begin{array}{l} y(0) = 0, \\ y'(0) = 0, \end{array} \quad b(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \pi) \\ 0, & t \in [\pi, \infty). \end{cases}$$

Solution: Recall: $h(t) = \mathcal{L}^{-1} \Big[\frac{1}{s\left(s^2 + s + \frac{5}{4}\right)} \Big].$

Partial fractions: Find the zeros of the denominator,

$$s_{\pm} = rac{1}{2} igl[-1 \pm \sqrt{1-5} igr] \quad \Rightarrow \quad {
m Complex \ roots.}$$

< □ > < 同 > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > <

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y'' + y' + \frac{5}{4}y = b(t), \quad \begin{array}{l} y(0) = 0, \\ y'(0) = 0, \end{array} \quad b(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \pi) \\ 0, & t \in [\pi, \infty). \end{cases}$$

Solution: Recall: $h(t) = \mathcal{L}^{-1} \Big[\frac{1}{s \left(s^2 + s + \frac{5}{4}\right)} \Big].$

Partial fractions: Find the zeros of the denominator,

$$s_{\pm} = rac{1}{2} igl[-1 \pm \sqrt{1-5} igr] \quad \Rightarrow \quad {
m Complex \ roots}.$$

< □ > < 同 > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > <

The partial fraction decomposition is:

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y'' + y' + \frac{5}{4}y = b(t), \quad \begin{array}{l} y(0) = 0, \\ y'(0) = 0, \end{array} \quad b(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \pi) \\ 0, & t \in [\pi, \infty). \end{cases}$$

Solution: Recall: $h(t) = \mathcal{L}^{-1} \Big[\frac{1}{s \left(s^2 + s + \frac{5}{4}\right)} \Big].$

Partial fractions: Find the zeros of the denominator,

$$s_{\pm} = rac{1}{2} igl[-1 \pm \sqrt{1-5} igr] \quad \Rightarrow \quad {
m Complex \ roots}.$$

◆□▶ ◆□▶ ◆三▶ ◆三▶ 三三 のへぐ

The partial fraction decomposition is:

$$H(s)=\frac{1}{\left(s^2+s+\frac{5}{4}\right)s}$$

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y'' + y' + \frac{5}{4}y = b(t), \quad \begin{array}{l} y(0) = 0, \\ y'(0) = 0, \end{array} \quad b(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \pi) \\ 0, & t \in [\pi, \infty). \end{cases}$$

Solution: Recall: $h(t) = \mathcal{L}^{-1} \Big[\frac{1}{s \left(s^2 + s + \frac{5}{4}\right)} \Big].$

Partial fractions: Find the zeros of the denominator,

$$s_{\pm} = rac{1}{2} igl[-1 \pm \sqrt{1-5} igr] \quad \Rightarrow \quad ext{Complex roots.}$$

The partial fraction decomposition is:

$$H(s) = \frac{1}{\left(s^2 + s + \frac{5}{4}\right)s} = \frac{a}{s} + \frac{(bs + c)}{\left(s^2 + s + \frac{5}{4}\right)}$$

< □ > < 同 > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > <

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y'' + y' + \frac{5}{4}y = b(t), \quad \begin{array}{l} y(0) = 0, \\ y'(0) = 0, \end{array} \quad b(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \pi) \\ 0, & t \in [\pi, \infty). \end{cases}$$

Solution: Recall:
$$H(s) = \frac{1}{\left(s^2 + s + \frac{5}{4}\right)s} = \frac{a}{s} + \frac{(bs + c)}{\left(s^2 + s + \frac{5}{4}\right)}.$$

▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□ ▶ ④ ●

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y'' + y' + \frac{5}{4}y = b(t), \quad \begin{array}{l} y(0) = 0, \\ y'(0) = 0, \end{array} \quad b(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \pi) \\ 0, & t \in [\pi, \infty). \end{cases}$$

Solution: Recall:
$$H(s) = \frac{1}{\left(s^2 + s + \frac{5}{4}\right)s} = \frac{a}{s} + \frac{(bs + c)}{\left(s^2 + s + \frac{5}{4}\right)}.$$

◆□▶ ◆□▶ ◆三▶ ◆三▶ 三三 のへぐ

The partial fraction decomposition is:

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y'' + y' + \frac{5}{4}y = b(t), \quad \begin{array}{l} y(0) = 0, \\ y'(0) = 0, \end{array} \quad b(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \pi) \\ 0, & t \in [\pi, \infty). \end{cases}$$

Solution: Recall:
$$H(s) = \frac{1}{(s^2 + s + \frac{5}{4})s} = \frac{a}{s} + \frac{(bs + c)}{(s^2 + s + \frac{5}{4})}.$$

◆□▶ ◆□▶ ◆三▶ ◆三▶ 三三 のへぐ

The partial fraction decomposition is:

$$1 = a\left(s^2 + s + \frac{5}{4}\right) + s\left(bs + c\right)$$

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y'' + y' + \frac{5}{4}y = b(t),$$
 $y(0) = 0,$ $b(t) = \begin{cases} 1, t \in [0, \pi) \\ 0, t \in [\pi, \infty). \end{cases}$

Solution: Recall: $H(s) = \frac{1}{(s^2 + s + \frac{5}{4})s} = \frac{a}{s} + \frac{(bs + c)}{(s^2 + s + \frac{5}{4})}.$

The partial fraction decomposition is:

$$1 = a\left(s^{2} + s + \frac{5}{4}\right) + s\left(bs + c\right) = (a + b)s^{2} + (a + c)s + \frac{5}{4}a.$$

◆□▶ ◆□▶ ◆三▶ ◆三▶ 三三 のへぐ

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}y=b(t), \quad egin{array}{cc} y(0)=0, \ y'(0)=0, \ y'(0)=0, \ \end{array} b(t)= egin{cases} 1, & t\in[0,\pi) \ 0, & t\in[\pi,\infty). \end{array}$$

Solution: Recall: $H(s) = \frac{1}{(s^2 + s + \frac{5}{4})s} = \frac{a}{s} + \frac{(bs + c)}{(s^2 + s + \frac{5}{4})}.$

The partial fraction decomposition is:

$$1 = a\left(s^{2} + s + \frac{5}{4}\right) + s\left(bs + c\right) = (a + b)s^{2} + (a + c)s + \frac{5}{4}a.$$

This equation implies that a, b, and c, are solutions of

$$a + b = 0$$
, $a + c = 0$, $\frac{5}{4}a = 1$.

・ロト・日本・モート モー うへで

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y'' + y' + \frac{5}{4}y = b(t), \quad \begin{array}{l} y(0) = 0, \\ y'(0) = 0, \end{array} \quad b(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \pi) \\ 0, & t \in [\pi, \infty). \end{cases}$$

Solution: So: $a = \frac{4}{5}, \quad b = -\frac{4}{5}, \quad c = -\frac{4}{5}.$

▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□ ▶ ④ ●

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}y=b(t), \hspace{0.5cm} y(0)=0, \hspace{0.5cm} b(t)= egin{cases} 1, & t\in [0,\pi)\ 0, & t\in [\pi,\infty). \end{cases}$$

◆□▶ ◆□▶ ◆三▶ ◆三▶ 三三 のへぐ

Solution: So:
$$a = \frac{4}{5}$$
, $b = -\frac{4}{5}$, $c = -\frac{4}{5}$.

Hence, we have found that,

$$H(s) = \frac{1}{\left(s^2 + s + \frac{5}{4}\right)s}$$

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}y=b(t), \hspace{0.5cm} y(0)=0, \hspace{0.5cm} b(t)= egin{cases} 1, & t\in [0,\pi)\ 0, & t\in [\pi,\infty). \end{cases}$$

Solution: So: $a = \frac{4}{5}$, $b = -\frac{4}{5}$, $c = -\frac{4}{5}$.

Hence, we have found that,

$$H(s) = \frac{1}{\left(s^2 + s + \frac{5}{4}\right)s} = \frac{4}{5} \left[\frac{1}{s} - \frac{(s+1)}{\left(s^2 + s + \frac{5}{4}\right)}\right]$$

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}y=b(t), \hspace{0.5cm} y(0)=0, \hspace{0.5cm} b(t)= egin{cases} 1, & t\in [0,\pi)\ 0, & t\in [\pi,\infty). \end{cases}$$

Solution: So: $a = \frac{4}{5}$, $b = -\frac{4}{5}$, $c = -\frac{4}{5}$.

Hence, we have found that,

$$H(s) = \frac{1}{\left(s^2 + s + \frac{5}{4}\right)s} = \frac{4}{5} \left[\frac{1}{s} - \frac{(s+1)}{\left(s^2 + s + \frac{5}{4}\right)}\right]$$

< □ > < 同 > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > <

We have to compute the inverse Laplace Transform

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}y=b(t), \hspace{0.5cm} y(0)=0, \hspace{0.5cm} b(t)= egin{cases} 1, & t\in [0,\pi)\ 0, & t\in [\pi,\infty). \end{cases}$$

Solution: So: $a = \frac{4}{5}$, $b = -\frac{4}{5}$, $c = -\frac{4}{5}$.

Hence, we have found that,

$$H(s) = \frac{1}{\left(s^2 + s + \frac{5}{4}\right)s} = \frac{4}{5} \left[\frac{1}{s} - \frac{(s+1)}{\left(s^2 + s + \frac{5}{4}\right)}\right]$$

We have to compute the inverse Laplace Transform

$$h(t) = \frac{4}{5} \mathcal{L}^{-1} \Big[\frac{1}{s} - \frac{(s+1)}{(s^2 + s + \frac{5}{4})} \Big]$$

< □ > < 同 > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > <

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y'' + y' + \frac{5}{4}y = b(t), \quad \begin{array}{l} y(0) = 0, \\ y'(0) = 0, \end{array} \quad b(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \pi) \\ 0, & t \in [\pi, \infty). \end{cases}$$

Solution: Recall: $h(t) = \frac{4}{5} \mathcal{L}^{-1} \Big[\frac{1}{s} - \frac{(s+1)}{(s^2 + s + \frac{5}{4})} \Big].$

▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□ ▶ ④ ●

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y'' + y' + \frac{5}{4}y = b(t), \quad \begin{array}{l} y(0) = 0, \\ y'(0) = 0, \end{array} \quad b(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \pi) \\ 0, & t \in [\pi, \infty). \end{cases}$$

Solution: Recall: $h(t) = \frac{4}{5} \mathcal{L}^{-1} \Big[\frac{1}{s} - \frac{(s+1)}{(s^2 + s + \frac{5}{4})} \Big].$

< ロ > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □

In this case we complete the square in the denominator,

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}y=b(t), \hspace{0.5cm} y(0)=0, \hspace{0.5cm} b(t)= egin{cases} 1, & t\in[0,\pi)\ 0, & t\in[\pi,\infty). \end{cases}$$

< ロ > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □

Solution: Recall:
$$h(t) = \frac{4}{5} \mathcal{L}^{-1} \Big[\frac{1}{s} - \frac{(s+1)}{(s^2 + s + \frac{5}{4})} \Big]$$

In this case we complete the square in the denominator,

$$s^{2} + s + \frac{5}{4} = \left[s^{2} + 2\left(\frac{1}{2}\right)s + \frac{1}{4}\right] - \frac{1}{4} + \frac{5}{4}$$

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}y=b(t), \hspace{0.5cm} y(0)=0, \hspace{0.5cm} b(t)= egin{cases} 1, & t\in [0,\pi)\ 0, & t\in [\pi,\infty). \end{cases}$$

Solution: Recall:
$$h(t) = \frac{4}{5} \mathcal{L}^{-1} \Big[\frac{1}{s} - \frac{(s+1)}{(s^2 + s + \frac{5}{4})} \Big]$$

In this case we complete the square in the denominator,

$$s^{2} + s + \frac{5}{4} = \left[s^{2} + 2\left(\frac{1}{2}\right)s + \frac{1}{4}\right] - \frac{1}{4} + \frac{5}{4} = \left(s + \frac{1}{2}\right)^{2} + 1.$$

< ロ > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}y=b(t), \hspace{0.5cm} y(0)=0, \hspace{0.5cm} b(t)= egin{cases} 1, & t\in [0,\pi)\ 0, & t\in [\pi,\infty). \end{cases}$$

Solution: Recall:
$$h(t) = \frac{4}{5} \mathcal{L}^{-1} \Big[\frac{1}{s} - \frac{(s+1)}{(s^2 + s + \frac{5}{4})} \Big]$$

In this case we complete the square in the denominator,

$$s^{2} + s + \frac{5}{4} = \left[s^{2} + 2\left(\frac{1}{2}\right)s + \frac{1}{4}\right] - \frac{1}{4} + \frac{5}{4} = \left(s + \frac{1}{2}\right)^{2} + 1.$$

So: $h(t) = \frac{4}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{(s+1)}{\left[\left(s + \frac{1}{2}\right)^{2} + 1\right]}\right].$

< ロ > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}y=b(t), \hspace{0.5cm} y(0)=0, \hspace{0.5cm} b(t)= egin{cases} 1, & t\in [0,\pi)\ 0, & t\in [\pi,\infty). \end{cases}$$

Solution: Recall:
$$h(t) = \frac{4}{5} \mathcal{L}^{-1} \Big[\frac{1}{s} - \frac{(s+1)}{(s^2 + s + \frac{5}{4})} \Big]$$

In this case we complete the square in the denominator,

$$s^{2} + s + \frac{5}{4} = \left[s^{2} + 2\left(\frac{1}{2}\right)s + \frac{1}{4}\right] - \frac{1}{4} + \frac{5}{4} = \left(s + \frac{1}{2}\right)^{2} + 1.$$

So:
$$h(t) = \frac{4}{5} \mathcal{L}^{-1} \Big[\frac{1}{s} - \frac{(s+1)}{\left[\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + 1 \right]} \Big].$$

That is, $h(t) = \frac{4}{5} \mathcal{L}^{-1} \Big[\frac{1}{s} \Big] - \frac{4}{5} \mathcal{L}^{-1} \Big[\frac{(s + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}}{\left[\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + 1 \right]} \Big].$

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y'' + y' + \frac{5}{4}y = b(t), \quad \begin{array}{l} y(0) = 0, \\ y'(0) = 0, \end{array} \quad b(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \pi) \\ 0, & t \in [\pi, \infty). \end{cases}$$

Solution: Recall:
$$h(t) = \frac{4}{5} \mathcal{L}^{-1} \Big[\frac{1}{s} \Big] - \frac{4}{5} \mathcal{L}^{-1} \Big[\frac{(s + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}}{\left[(s + \frac{1}{2})^2 + 1 \right]} \Big].$$

▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□ ▶ ④ ●

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y'' + y' + \frac{5}{4}y = b(t), \quad \begin{array}{l} y(0) = 0, \\ y'(0) = 0, \end{array} \quad b(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \pi) \\ 0, & t \in [\pi, \infty). \end{cases}$$

Solution: Recall:
$$h(t) = \frac{4}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \frac{4}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}}{\left[\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + 1\right]}\right].$$
$$h(t) = \frac{4}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \frac{4}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s + \frac{1}{2})}{\left[\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + 1\right]}\right] - \frac{2}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\left[\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + 1\right]}\right].$$

▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□ ▶ ④ ●

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y'' + y' + \frac{5}{4}y = b(t), \quad \begin{array}{l} y(0) = 0, \\ y'(0) = 0, \end{array} \quad b(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,\pi) \\ 0, & t \in [\pi,\infty). \end{cases}$$

Solution: Recall: $h(t) = \frac{4}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \frac{4}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s+\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}}{\left[\left(s+\frac{1}{2}\right)^{2} + 1\right]}\right].$
 $h(t) = \frac{4}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \frac{4}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s+\frac{1}{2})}{\left[\left(s+\frac{1}{2}\right)^{2} + 1\right]}\right] - \frac{2}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\left[\left(s+\frac{1}{2}\right)^{2} + 1\right]}\right].$
Recall: $\mathcal{L}^{-1}[F(s-c)] = e^{ct}f(t).$

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y'' + y' + \frac{5}{4}y = b(t), \quad \begin{array}{l} y(0) = 0, \\ y'(0) = 0, \end{array} \quad b(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \pi) \\ 0, & t \in [\pi, \infty). \end{cases}$$

Solution: Recall: $h(t) = \frac{4}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \frac{4}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}}{\left[\left(s+\frac{1}{2}\right)^{2}+1\right]}\right].$
 $h(t) = \frac{4}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \frac{4}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s+\frac{1}{2})}{\left[\left(s+\frac{1}{2}\right)^{2}+1\right]}\right] - \frac{2}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\left[\left(s+\frac{1}{2}\right)^{2}+1\right]}\right].$
Recall: $\mathcal{L}^{-1}[F(s-c)] = e^{ct}f(t).$ Hence,
 $h(t) = \frac{4}{5}\left[1 - e^{-t/2}\cos(t) - \frac{1}{2}e^{-t/2}\sin(t)\right].$

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y'' + y' + \frac{5}{4}y = b(t), \quad \begin{array}{l} y(0) = 0, \\ y'(0) = 0, \end{array} \quad b(t) = \begin{cases} 1, \quad t \in [0, \pi) \\ 0, \quad t \in [\pi, \infty). \end{cases}$$

Solution: Recall:
$$h(t) = \frac{4}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \frac{4}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}}{\left[\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + 1\right]}\right].$$
$$h(t) = \frac{4}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \frac{4}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s + \frac{1}{2})}{\left[\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + 1\right]}\right] - \frac{2}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\left[\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + 1\right]}\right].$$

Recall:
$$\mathcal{L}^{-1}[F(s - c)] = e^{ct}f(t). \text{ Hence,}$$
$$h(t) = \frac{4}{5}\left[1 - e^{-t/2}\cos(t) - \frac{1}{2}e^{-t/2}\sin(t)\right].$$
We conclude:
$$y(t) = h(t) + u(t - \pi)h(t - \pi). \qquad \vartriangleleft$$

▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□ ▶ ④ ●

Equations with discontinuous sources (Sect. 4.3).

- Differential equations with discontinuous sources.
- We solve the IVPs:
 - (a) Example 1:

$$y' + 2y = u(t - 4), \qquad y(0) = 3.$$

(b) Example 2:

$$y''+y'+rac{5}{4}\,y=b(t), \hspace{0.5cm} y(0)=0, \hspace{0.5cm} b(t)= egin{cases} 1, & t\in[0,\pi)\ 0, & t\in[\pi,\infty). \end{cases}$$

(c) Example 3:

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}y=g(t), \hspace{0.5cm} y(0)=0, \ y'(0)=0, \hspace{0.5cm} g(t)= egin{cases} \sin(t) & t\in [0,\pi) \ 0 & t\in [\pi,\infty). \end{cases}$$

▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□ ▶ ④ ●

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}y=g(t), \hspace{1cm} y(0)=0, \ y'(0)=0, \hspace{1cm} g(t)= egin{cases} \sin(t) & t\in [0,\pi) \ 0 & t\in [\pi,\infty). \end{cases}$$

Solution:

Rewrite the source function using step functions.

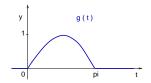
Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}y=g(t), \hspace{0.5cm} y(0)=0, \ y'(0)=0, \hspace{0.5cm} g(t)= egin{cases} \sin(t) & t\in [0,\pi) \ 0 & t\in [\pi,\infty). \end{cases}$$

Solution:

Rewrite the source function using step functions.



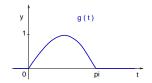
Example

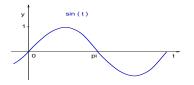
Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}y=g(t), \hspace{0.5cm} y(0)=0, \ y'(0)=0, \hspace{0.5cm} g(t)= egin{cases} \sin(t) & t\in [0,\pi) \ 0 & t\in [\pi,\infty). \end{cases}$$

Solution:

Rewrite the source function using step functions.





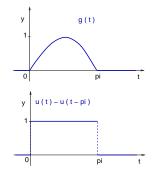
Example

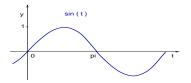
Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}y=g(t), \hspace{0.5cm} y(0)=0, \ y'(0)=0, \hspace{0.5cm} g(t)= egin{cases} \sin(t) & t\in [0,\pi) \ 0 & t\in [\pi,\infty). \end{cases}$$

Solution:

Rewrite the source function using step functions.





Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}y=g(t), \hspace{0.5cm} y(0)=0, \hspace{0.5cm} g(t)= egin{cases} \sin(t) & t\in [0,\pi) \ 0 & t\in [\pi,\infty). \end{cases}$$

◆□▶ ◆□▶ ◆三▶ ◆三▶ 三三 のへぐ

Solution: The graphs imply: $g(t) = [u(t) - u(t - \pi)] \sin(t)$.

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}y=g(t), \hspace{0.5cm} y(0)=0, \hspace{0.5cm} g(t)= egin{cases} \sin(t) & t\in [0,\pi) \ 0 & t\in [\pi,\infty). \end{cases}$$

◆□▶ ◆□▶ ◆三▶ ◆三▶ 三三 のへぐ

Solution: The graphs imply: $g(t) = [u(t) - u(t - \pi)] \sin(t)$.

Recall the identity: $sin(t) = -sin(t - \pi)$.

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}y=g(t), \hspace{0.5cm} y(0)=0, \hspace{0.5cm} g(t)= egin{cases} \sin(t) & t\in [0,\pi) \ 0 & t\in [\pi,\infty). \end{cases}$$

Solution: The graphs imply: $g(t) = [u(t) - u(t - \pi)] \sin(t)$.

Recall the identity: $sin(t) = -sin(t - \pi)$. Then,

$$g(t) = u(t) \sin(t) - u(t - \pi) \sin(t),$$

◆□▶ ◆□▶ ◆三▶ ◆三▶ 三三 のへぐ

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}y=g(t), \hspace{0.5cm} y(0)=0, \hspace{0.5cm} g(t)= egin{cases} \sin(t) & t\in [0,\pi) \ 0 & t\in [\pi,\infty). \end{cases}$$

Solution: The graphs imply: $g(t) = [u(t) - u(t - \pi)] \sin(t)$.

Recall the identity: $sin(t) = -sin(t - \pi)$. Then,

$$g(t) = u(t) \sin(t) - u(t-\pi) \sin(t),$$

 $g(t) = u(t) \sin(t) + u(t-\pi) \sin(t-\pi).$

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}y=g(t), \hspace{0.5cm} y(0)=0, \hspace{0.5cm} g(t)= egin{cases} \sin(t) & t\in [0,\pi) \ 0 & t\in [\pi,\infty). \end{cases}$$

Solution: The graphs imply: $g(t) = [u(t) - u(t - \pi)] \sin(t)$.

Recall the identity: $sin(t) = -sin(t - \pi)$. Then,

$$g(t) = u(t) \sin(t) - u(t - \pi) \sin(t),$$

$$g(t) = u(t) \sin(t) + u(t-\pi) \sin(t-\pi).$$

Now is simple to find $\mathcal{L}[g]$,

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}y=g(t), \hspace{0.5cm} y(0)=0, \hspace{0.5cm} g(t)= \begin{cases} \sin(t) & t\in [0,\pi) \ 0 & t\in [\pi,\infty). \end{cases}$$

Solution: The graphs imply: $g(t) = [u(t) - u(t - \pi)] \sin(t)$.

Recall the identity: $sin(t) = -sin(t - \pi)$. Then,

$$g(t) = u(t) \sin(t) - u(t-\pi) \sin(t),$$

$$g(t) = u(t) \sin(t) + u(t-\pi) \sin(t-\pi).$$

Now is simple to find $\mathcal{L}[g]$, since

$$\mathcal{L}[g(t)] = \mathcal{L}[u(t)\sin(t)] + \mathcal{L}[u(t-\pi)\sin(t-\pi)].$$

- ロ ト - 4 回 ト - 4 □ - 4

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}y=g(t), \hspace{0.5cm} y(0)=0, \ y'(0)=0, \hspace{0.5cm} g(t)= egin{cases} \sin(t) & t\in [0,\pi) \ 0 & t\in [\pi,\infty). \end{cases}$$

Solution: So: $\mathcal{L}[g(t)] = \mathcal{L}[u(t) \sin(t)] + \mathcal{L}[u(t - \pi) \sin(t - \pi)].$

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}y=g(t), \hspace{0.5cm} y(0)=0, \hspace{0.5cm} g(t)= egin{cases} \sin(t) & t\in[0,\pi) \ 0 & t\in[\pi,\infty). \end{cases}$$

Solution: So: $\mathcal{L}[g(t)] = \mathcal{L}[u(t) \sin(t)] + \mathcal{L}[u(t-\pi) \sin(t-\pi)].$

$$\mathcal{L}[g(t)] = rac{1}{(s^2+1)} + e^{-\pi s} rac{1}{(s^2+1)}.$$

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}y=g(t), \hspace{0.5cm} y(0)=0, \hspace{0.5cm} g(t)= \begin{cases} \sin(t) & t\in [0,\pi) \\ 0 & t\in [\pi,\infty). \end{cases}$$

Solution: So: $\mathcal{L}[g(t)] = \mathcal{L}[u(t) \sin(t)] + \mathcal{L}[u(t - \pi) \sin(t - \pi)].$

$$\mathcal{L}[g(t)] = rac{1}{(s^2+1)} + e^{-\pi s} rac{1}{(s^2+1)}.$$

Recall the Laplace transform of the differential equation

$$\mathcal{L}[y''] + \mathcal{L}[y'] + \frac{5}{4}\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[g].$$

◆□▶ ◆□▶ ◆三▶ ◆三▶ 三三 のへぐ

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}y=g(t), \hspace{0.5cm} y(0)=0, \hspace{0.5cm} g(t)= \begin{cases} \sin(t) & t\in [0,\pi) \\ 0 & t\in [\pi,\infty). \end{cases}$$

Solution: So: $\mathcal{L}[g(t)] = \mathcal{L}[u(t) \sin(t)] + \mathcal{L}[u(t-\pi) \sin(t-\pi)].$

$$\mathcal{L}[g(t)] = rac{1}{(s^2+1)} + e^{-\pi s} rac{1}{(s^2+1)}.$$

Recall the Laplace transform of the differential equation

$$\mathcal{L}[y''] + \mathcal{L}[y'] + \frac{5}{4}\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[g].$$

The initial conditions imply:

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}y=g(t), \hspace{0.5cm} y(0)=0, \hspace{0.5cm} g(t)= \begin{cases} \sin(t) & t\in [0,\pi) \\ 0 & t\in [\pi,\infty). \end{cases}$$

Solution: So: $\mathcal{L}[g(t)] = \mathcal{L}[u(t) \sin(t)] + \mathcal{L}[u(t-\pi) \sin(t-\pi)].$

$$\mathcal{L}[g(t)] = rac{1}{(s^2+1)} + e^{-\pi s} rac{1}{(s^2+1)}.$$

Recall the Laplace transform of the differential equation

$$\mathcal{L}[y''] + \mathcal{L}[y'] + \frac{5}{4}\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[g].$$

- ロ ト - 4 回 ト - 4 □ - 4

The initial conditions imply: $\mathcal{L}[y''] = s^2 \mathcal{L}[y]$

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}y=g(t), \hspace{0.5cm} y(0)=0, \hspace{0.5cm} g(t)= \begin{cases} \sin(t) & t\in [0,\pi) \ 0 & t\in [\pi,\infty). \end{cases}$$

Solution: So: $\mathcal{L}[g(t)] = \mathcal{L}[u(t) \sin(t)] + \mathcal{L}[u(t-\pi) \sin(t-\pi)].$

$$\mathcal{L}[g(t)] = rac{1}{(s^2+1)} + e^{-\pi s} \, rac{1}{(s^2+1)}.$$

Recall the Laplace transform of the differential equation

$$\mathcal{L}[y''] + \mathcal{L}[y'] + \frac{5}{4}\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[g].$$

The initial conditions imply: $\mathcal{L}[y''] = s^2 \mathcal{L}[y]$ and $\mathcal{L}[y'] = s \mathcal{L}[y]$.

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}y=g(t), \hspace{0.5cm} y(0)=0, \hspace{0.5cm} g(t)= \begin{cases} \sin(t) & t\in [0,\pi) \\ 0 & t\in [\pi,\infty). \end{cases}$$

Solution: So: $\mathcal{L}[g(t)] = \mathcal{L}[u(t) \sin(t)] + \mathcal{L}[u(t - \pi) \sin(t - \pi)].$

$$\mathcal{L}[g(t)] = rac{1}{(s^2+1)} + e^{-\pi s} \, rac{1}{(s^2+1)}.$$

Recall the Laplace transform of the differential equation

$$\mathcal{L}[y''] + \mathcal{L}[y'] + \frac{5}{4}\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[g].$$

The initial conditions imply: $\mathcal{L}[y''] = s^2 \mathcal{L}[y]$ and $\mathcal{L}[y'] = s \mathcal{L}[y]$.

Therefore,
$$\left(s^2+s+rac{5}{4}
ight)\mathcal{L}[y]=\left(1+e^{-\pi s}
ight)rac{1}{(s^2+1)}.$$

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y'' + y' + \frac{5}{4}y = g(t), \quad \begin{array}{l} y(0) = 0, \\ y'(0) = 0, \end{array} g(t) = \begin{cases} \sin(t) & t \in [0, \pi) \\ 0 & t \in [\pi, \infty). \end{cases}$$

Solution: Recall: $\left(s^2 + s + \frac{5}{4}\right) \mathcal{L}[y] = \left(1 + e^{-\pi s}\right) \frac{1}{(s^2 + 1)}.$

▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□ ▶ ④ ●

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y'' + y' + \frac{5}{4}y = g(t), \quad \begin{array}{l} y(0) = 0, \\ y'(0) = 0, \end{array} g(t) = \begin{cases} \sin(t) & t \in [0, \pi) \\ 0 & t \in [\pi, \infty). \end{cases}$$

Solution: Recall: $\left(s^2 + s + \frac{5}{4}\right) \mathcal{L}[y] = \left(1 + e^{-\pi s}\right) \frac{1}{(s^2 + 1)}.$
 $\mathcal{L}[y] = \left(1 + e^{-\pi s}\right) \frac{1}{(s^2 + s + \frac{5}{4})(s^2 + 1)}.$

▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□ ▶ ④ ●

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y'' + y' + \frac{5}{4}y = g(t), \quad \begin{array}{l} y(0) = 0, \\ y'(0) = 0, \end{array} g(t) = \begin{cases} \sin(t) & t \in [0, \pi) \\ 0 & t \in [\pi, \infty). \end{cases}$$

Solution: Recall: $\left(s^2 + s + \frac{5}{4}\right) \mathcal{L}[y] = \left(1 + e^{-\pi s}\right) \frac{1}{(s^2 + 1)}.$

$$\mathcal{L}[y] = \left(1+e^{-\pi s}
ight)rac{1}{\left(s^2+s+rac{5}{4}
ight)\left(s^2+1
ight)}$$

- ロ ト - 4 回 ト - 4 □ - 4

Introduce the function $H(s) = \frac{1}{\left(s^2 + s + \frac{5}{4}\right)(s^2 + 1)}$.

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y'' + y' + \frac{5}{4}y = g(t), \quad \begin{array}{l} y(0) = 0, \\ y'(0) = 0, \end{array} g(t) = \begin{cases} \sin(t) & t \in [0, \pi) \\ 0 & t \in [\pi, \infty). \end{cases}$$

Solution: Recall:
$$(s^2 + s + \frac{5}{4})\mathcal{L}[y] = (1 + e^{-\pi s})\frac{1}{(s^2 + 1)}$$

$$\mathcal{L}[y] = \left(1+e^{-\pi s}
ight) rac{1}{\left(s^2+s+rac{5}{4}
ight) \left(s^2+1
ight)}.$$

Introduce the function $H(s) = \frac{1}{\left(s^2 + s + \frac{5}{4}\right)(s^2 + 1)}$.

Then, $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] + \mathcal{L}^{-1}[e^{-\pi s} H(s)].$

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}y=g(t), \hspace{0.5cm} y(0)=0, \hspace{0.5cm} g(t)= \begin{cases} \sin(t) & t\in[0,\pi) \\ 0 & t\in[\pi,\infty). \end{cases}$$

Solution: Recall: $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] + \mathcal{L}^{-1}[e^{-\pi s} H(s)]$, and

$$H(s) = rac{1}{\left(s^2 + s + rac{5}{4}
ight)(s^2 + 1)}.$$

▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□ ▶ ④ ●

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}y=g(t), \hspace{1cm} y(0)=0, \ y'(0)=0, \hspace{1cm} g(t)= \begin{cases} \sin(t) & t\in [0,\pi) \\ 0 & t\in [\pi,\infty). \end{cases}$$

Solution: Recall: $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] + \mathcal{L}^{-1}[e^{-\pi s} H(s)]$, and

$$H(s) = rac{1}{\left(s^2 + s + rac{5}{4}
ight)(s^2 + 1)}.$$

▲□▶▲□▶▲□▶▲□▶ □ のQ@

Partial fractions:

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}y=g(t), \hspace{1cm} y(0)=0, \ y'(0)=0, \hspace{1cm} g(t)= \begin{cases} \sin(t) & t\in [0,\pi) \\ 0 & t\in [\pi,\infty). \end{cases}$$

Solution: Recall: $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] + \mathcal{L}^{-1}[e^{-\pi s} H(s)]$, and

$$H(s) = rac{1}{\left(s^2 + s + rac{5}{4}
ight)(s^2 + 1)}.$$

▲□▶▲□▶▲□▶▲□▶ □ のQ@

Partial fractions: Find the zeros of the denominator,

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}y=g(t), \hspace{1cm} y(0)=0, \ y'(0)=0, \hspace{1cm} g(t)= \begin{cases} \sin(t) & t\in [0,\pi) \\ 0 & t\in [\pi,\infty). \end{cases}$$

Solution: Recall: $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] + \mathcal{L}^{-1}[e^{-\pi s} H(s)]$, and

$$H(s) = rac{1}{\left(s^2 + s + rac{5}{4}
ight)(s^2 + 1)}.$$

Partial fractions: Find the zeros of the denominator,

$$s_{\pm}=rac{1}{2}ig[-1\pm\sqrt{1-5}ig]$$

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y'' + y' + rac{5}{4}y = g(t), \quad egin{array}{cc} y(0) = 0, \ y'(0) = 0, \ y'(0) = 0, \ \end{array} g(t) = egin{cases} \sin(t) & t \in [0,\pi) \ 0 & t \in [\pi,\infty). \end{array}$$

Solution: Recall: $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] + \mathcal{L}^{-1}[e^{-\pi s} H(s)]$, and

$$H(s) = rac{1}{\left(s^2 + s + rac{5}{4}
ight)(s^2 + 1)}.$$

Partial fractions: Find the zeros of the denominator,

$$s_{\pm} = \frac{1}{2} \left[-1 \pm \sqrt{1-5} \right] \quad \Rightarrow \quad \text{Complex roots.}$$

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y'' + y' + rac{5}{4}y = g(t), \quad egin{array}{cc} y(0) = 0, \ y'(0) = 0, \ y'(0) = 0, \ \end{array} g(t) = egin{cases} \sin(t) & t \in [0,\pi) \ 0 & t \in [\pi,\infty). \end{array}$$

Solution: Recall: $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] + \mathcal{L}^{-1}[e^{-\pi s} H(s)]$, and

$$H(s) = rac{1}{\left(s^2 + s + rac{5}{4}
ight)(s^2 + 1)}.$$

Partial fractions: Find the zeros of the denominator,

$$s_{\pm} = \frac{1}{2} \left[-1 \pm \sqrt{1-5} \right] \quad \Rightarrow \quad \text{Complex roots.}$$

The partial fraction decomposition is:

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}y=g(t), \hspace{1cm} y(0)=0, \ y'(0)=0, \hspace{1cm} g(t)= \begin{cases} \sin(t) & t\in [0,\pi) \\ 0 & t\in [\pi,\infty). \end{cases}$$

Solution: Recall: $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] + \mathcal{L}^{-1}[e^{-\pi s} H(s)]$, and

$$H(s) = rac{1}{\left(s^2 + s + rac{5}{4}
ight)(s^2 + 1)}.$$

Partial fractions: Find the zeros of the denominator,

$$s_{\pm} = \frac{1}{2} \left[-1 \pm \sqrt{1-5} \right] \quad \Rightarrow \quad \text{Complex roots.}$$

The partial fraction decomposition is:

$$\frac{1}{\left(s^2 + s + \frac{5}{4}\right)\left(s^2 + 1\right)} = \frac{(as+b)}{\left(s^2 + s + \frac{5}{4}\right)} + \frac{(cs+d)}{(s^2+1)}.$$

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y'' + y' + \frac{5}{4}y = g(t), \quad \begin{array}{l} y(0) = 0, \\ y'(0) = 0, \end{array} g(t) = \begin{cases} \sin(t) & t \in [0, \pi) \\ 0 & t \in [\pi, \infty). \end{cases}$$

Solution: So:
$$\frac{1}{\left(s^2 + s + \frac{5}{4}\right)\left(s^2 + 1\right)} = \frac{(as + b)}{\left(s^2 + s + \frac{5}{4}\right)} + \frac{(cs + d)}{(s^2 + 1)}.$$

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y'' + y' + \frac{5}{4}y = g(t), \quad \begin{array}{l} y(0) = 0, \\ y'(0) = 0, \end{array} g(t) = \begin{cases} \sin(t) & t \in [0, \pi) \\ 0 & t \in [\pi, \infty). \end{cases}$$

Solution: So:
$$\frac{1}{\left(s^2 + s + \frac{5}{4}\right)\left(s^2 + 1\right)} = \frac{(as + b)}{\left(s^2 + s + \frac{5}{4}\right)} + \frac{(cs + d)}{(s^2 + 1)}.$$

Therefore, we get

$$1 = (as + b)(s^{2} + 1) + (cs + d)(s^{2} + s + \frac{5}{4}),$$

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y'' + y' + \frac{5}{4}y = g(t), \quad \begin{array}{l} y(0) = 0, \\ y'(0) = 0, \end{array} g(t) = \begin{cases} \sin(t) & t \in [0, \pi) \\ 0 & t \in [\pi, \infty). \end{cases}$$

Solution: So:
$$\frac{1}{\left(s^2 + s + \frac{5}{4}\right)\left(s^2 + 1\right)} = \frac{(as + b)}{\left(s^2 + s + \frac{5}{4}\right)} + \frac{(cs + d)}{(s^2 + 1)}.$$

Therefore, we get

$$1 = (as + b)(s^{2} + 1) + (cs + d)(s^{2} + s + \frac{5}{4}),$$

$$1 = (a + c)s^{3} + (b + c + d)s^{2} + (a + \frac{5}{4}c + d)s + (b + \frac{5}{4}d).$$

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y'' + y' + \frac{5}{4}y = g(t), \quad \begin{array}{l} y(0) = 0, \\ y'(0) = 0, \end{array} g(t) = \begin{cases} \sin(t) & t \in [0, \pi) \\ 0 & t \in [\pi, \infty). \end{cases}$$

Solution: So:
$$\frac{1}{\left(s^2 + s + \frac{5}{4}\right)\left(s^2 + 1\right)} = \frac{(as + b)}{\left(s^2 + s + \frac{5}{4}\right)} + \frac{(cs + d)}{(s^2 + 1)}.$$

Therefore, we get

$$1 = (as + b)(s^{2} + 1) + (cs + d)(s^{2} + s + \frac{5}{4}),$$

$$1 = (a + c)s^{3} + (b + c + d)s^{2} + (a + \frac{5}{4}c + d)s + (b + \frac{5}{4}d).$$

This equation implies that a, b, c, and d, are solutions of

$$a + c = 0$$
, $b + c + d = 0$, $a + \frac{5}{4}c + d = 0$, $b + \frac{5}{4}d = 1$.

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y'' + y' + \frac{5}{4}y = g(t), \quad \begin{array}{l} y(0) = 0, \\ y'(0) = 0, \end{array} g(t) = \begin{cases} \sin(t) & t \in [0, \pi) \\ 0 & t \in [\pi, \infty). \end{cases}$$

Solution: So: $a = \frac{16}{17}, \quad b = \frac{12}{17}, \quad c = -\frac{16}{17}, \quad d = \frac{4}{17}. \end{cases}$

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y'' + y' + \frac{5}{4}y = g(t), \quad \begin{array}{l} y(0) = 0, \\ y'(0) = 0, \end{array} g(t) = \begin{cases} \sin(t) & t \in [0, \pi) \\ 0 & t \in [\pi, \infty). \end{cases}$$

Solution: So: $a = \frac{16}{17}, \ b = \frac{12}{17}, \ c = -\frac{16}{17}, \ d = \frac{4}{17}. \end{cases}$

We have found:
$$H(s) = rac{4}{17} \left[rac{(4s+3)}{(s^2+s+rac{5}{4})} + rac{(-4s+1)}{(s^2+1)}
ight].$$

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}y=g(t), \hspace{0.5cm} y(0)=0, \hspace{0.5cm} g(t)= \begin{cases} \sin(t) & t\in [0,\pi) \\ 0 & t\in [\pi,\infty). \end{cases}$$

Solution: So: $a = \frac{16}{17}$, $b = \frac{12}{17}$, $c = -\frac{16}{17}$, $d = \frac{4}{17}$. We have found: $H(s) = \frac{4}{17} \left[\frac{(4s+3)}{(s^2+s+\frac{5}{4})} + \frac{(-4s+1)}{(s^2+1)} \right]$.

Complete the square in the denominator,

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y'' + y' + rac{5}{4}y = g(t), \quad egin{array}{c} y(0) = 0, \ y'(0) = 0, \ y'(0) = 0, \ \end{array} g(t) = egin{cases} \sin(t) & t \in [0,\pi) \ 0 & t \in [\pi,\infty). \end{array}$$

Solution: So: $a = \frac{16}{17}$, $b = \frac{12}{17}$, $c = -\frac{16}{17}$, $d = \frac{4}{17}$. We have found: $H(s) = \frac{4}{17} \left[\frac{(4s+3)}{(s^2+s+\frac{5}{4})} + \frac{(-4s+1)}{(s^2+1)} \right]$.

Complete the square in the denominator,

$$s^{2} + s + \frac{5}{4} = \left[s^{2} + 2\left(\frac{1}{2}\right)s + \frac{1}{4}\right] - \frac{1}{4} + \frac{5}{4}$$

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}y=g(t), \hspace{0.5cm} y(0)=0, \hspace{0.5cm} g(t)= \begin{cases} \sin(t) & t\in [0,\pi) \\ 0 & t\in [\pi,\infty). \end{cases}$$

Solution: So: $a = \frac{16}{17}$, $b = \frac{12}{17}$, $c = -\frac{16}{17}$, $d = \frac{4}{17}$. We have found: $H(s) = \frac{4}{17} \left[\frac{(4s+3)}{(s^2+s+\frac{5}{4})} + \frac{(-4s+1)}{(s^2+1)} \right]$.

Complete the square in the denominator,

$$s^{2} + s + \frac{5}{4} = \left[s^{2} + 2\left(\frac{1}{2}\right)s + \frac{1}{4}\right] - \frac{1}{4} + \frac{5}{4} = \left(s + \frac{1}{2}\right)^{2} + 1.$$

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}y=g(t), \hspace{0.5cm} y(0)=0, \hspace{0.5cm} g(t)= \begin{cases} \sin(t) & t\in [0,\pi) \\ 0 & t\in [\pi,\infty). \end{cases}$$

Solution: So:
$$a = \frac{16}{17}$$
, $b = \frac{12}{17}$, $c = -\frac{16}{17}$, $d = \frac{4}{17}$.
We have found: $H(s) = \frac{4}{17} \left[\frac{(4s+3)}{(s^2+s+\frac{5}{4})} + \frac{(-4s+1)}{(s^2+1)} \right]$.

Complete the square in the denominator,

$$s^{2} + s + \frac{5}{4} = \left[s^{2} + 2\left(\frac{1}{2}\right)s + \frac{1}{4}\right] - \frac{1}{4} + \frac{5}{4} = \left(s + \frac{1}{2}\right)^{2} + 1.$$
$$H(s) = \frac{4}{17} \left[\frac{(4s+3)}{\left[\left(s + \frac{1}{2}\right)^{2} + 1\right]} + \frac{(-4s+1)}{(s^{2}+1)}\right].$$

・ロト・日本・モート モー うへぐ

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y'' + y' + \frac{5}{4}y = g(t), \quad \begin{array}{l} y(0) = 0, \\ y'(0) = 0, \end{array} g(t) = \begin{cases} \sin(t) & t \in [0, \pi) \\ 0 & t \in [\pi, \infty). \end{cases}$$

Solution: So: $H(s) = \frac{4}{17} \left[\frac{(4s+3)}{\left[\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + 1 \right]} + \frac{(-4s+1)}{(s^2+1)} \right].$

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y'' + y' + \frac{5}{4}y = g(t), \quad \begin{array}{l} y(0) = 0, \\ y'(0) = 0, \end{array} g(t) = \begin{cases} \sin(t) & t \in [0, \pi) \\ 0 & t \in [\pi, \infty). \end{cases}$$

Solution: So: $H(s) = \frac{4}{17} \left[\frac{(4s+3)}{\left[\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + 1 \right]} + \frac{(-4s+1)}{(s^2+1)} \right].$

◆□▶ ◆□▶ ◆臣▶ ◆臣▶ 三臣 - のへぐ

Rewrite the polynomial in the numerator,

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y'' + y' + \frac{5}{4}y = g(t), \quad \begin{array}{l} y(0) = 0, \\ y'(0) = 0, \end{array} g(t) = \begin{cases} \sin(t) & t \in [0, \pi) \\ 0 & t \in [\pi, \infty). \end{cases}$$

Solution: So: $H(s) = \frac{4}{17} \left[\frac{(4s+3)}{\left[\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + 1 \right]} + \frac{(-4s+1)}{(s^2+1)} \right].$

Rewrite the polynomial in the numerator,

$$(4s+3) = 4\left(s+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+3$$

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y'' + y' + \frac{5}{4}y = g(t), \quad \begin{array}{l} y(0) = 0, \\ y'(0) = 0, \end{array} g(t) = \begin{cases} \sin(t) & t \in [0, \pi) \\ 0 & t \in [\pi, \infty). \end{cases}$$

Solution: So: $H(s) = \frac{4}{17} \left[\frac{(4s+3)}{\left[\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + 1 \right]} + \frac{(-4s+1)}{(s^2+1)} \right].$

Rewrite the polynomial in the numerator,

$$(4s+3) = 4\left(s+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+3 = 4\left(s+\frac{1}{2}\right)+1,$$

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y'' + y' + \frac{5}{4}y = g(t), \quad \begin{array}{l} y(0) = 0, \\ y'(0) = 0, \end{array} g(t) = \begin{cases} \sin(t) & t \in [0, \pi) \\ 0 & t \in [\pi, \infty). \end{cases}$$

Solution: So: $H(s) = \frac{4}{17} \left[\frac{(4s+3)}{\left[\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + 1 \right]} + \frac{(-4s+1)}{(s^2+1)} \right].$

Rewrite the polynomial in the numerator,

$$(4s+3) = 4\left(s+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+3 = 4\left(s+\frac{1}{2}\right)+1,$$

$$H(s) = \frac{4}{17} \left[4 \frac{\left(s + \frac{1}{2}\right)}{\left[\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + 1\right]} + \frac{1}{\left[\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + 1\right]} - 4 \frac{s}{\left(s^2 + 1\right)} + \frac{1}{\left(s^2 + 1\right)} \right],$$

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}y=g(t), \hspace{0.5cm} y(0)=0, \hspace{0.5cm} g(t)= egin{cases} \sin(t) & t\in[0,\pi) \ 0 & t\in[\pi,\infty). \end{cases}$$

Solution:

$$H(s) = \frac{4}{17} \left[4 \frac{\left(s + \frac{1}{2}\right)}{\left[\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + 1\right]} + \frac{1}{\left[\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + 1\right]} - 4 \frac{s}{\left(s^2 + 1\right)} + \frac{1}{\left(s^2 + 1\right)} \right],$$

(ロ)、(型)、(E)、(E)、 E、 のQの

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}y=g(t), \hspace{0.5cm} y(0)=0, \hspace{0.5cm} g(t)= egin{cases} \sin(t) & t\in[0,\pi)\ 0 & t\in[\pi,\infty). \end{cases}$$

Solution:

$$H(s) = \frac{4}{17} \left[4 \frac{\left(s + \frac{1}{2}\right)}{\left[\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + 1\right]} + \frac{1}{\left[\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + 1\right]} - 4 \frac{s}{\left(s^2 + 1\right)} + \frac{1}{\left(s^2 + 1\right)} \right],$$

Use the Laplace Transform table to get H(s) equal to

$$H(s) = \frac{4}{17} \Big[4 \mathcal{L} \big[e^{-t/2} \cos(t) \big] + \mathcal{L} \big[e^{-t/2} \sin(t) \big] - 4 \mathcal{L} [\cos(t)] + \mathcal{L} [\sin(t)] \Big].$$

◆□▶ ◆□▶ ◆三▶ ◆三▶ 三三 のへぐ

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}y=g(t), \hspace{0.5cm} y(0)=0, \hspace{0.5cm} g(t)= egin{cases} \sin(t) & t\in[0,\pi)\ 0 & t\in[\pi,\infty). \end{cases}$$

Solution:

$$H(s) = \frac{4}{17} \left[4 \frac{\left(s + \frac{1}{2}\right)}{\left[\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + 1\right]} + \frac{1}{\left[\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + 1\right]} - 4 \frac{s}{\left(s^2 + 1\right)} + \frac{1}{\left(s^2 + 1\right)} \right],$$

Use the Laplace Transform table to get H(s) equal to

$$\begin{split} \mathcal{H}(s) &= \frac{4}{17} \Big[4 \,\mathcal{L} \big[e^{-t/2} \cos(t) \big] + \mathcal{L} \big[e^{-t/2} \sin(t) \big] - 4 \,\mathcal{L} [\cos(t)] + \mathcal{L} [\sin(t)] \Big]. \\ \mathcal{H}(s) &= \mathcal{L} \Big[\frac{4}{17} \Big(4 e^{-t/2} \cos(t) + e^{-t/2} \sin(t) - 4 \cos(t) + \sin(t) \Big) \Big]. \end{split}$$

< □ > < 同 > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > <

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}\,y=g(t), \hspace{0.5cm} y(0)=0, \hspace{0.5cm} g(t)= egin{cases} \sin(t) & t\in[0,\pi)\ 0 & t\in[\pi,\infty). \end{cases}$$

Solution: Recall:

$$H(s) = \mathcal{L}\Big[\frac{4}{17}\Big(4e^{-t/2}\cos(t) + e^{-t/2}\sin(t) - 4\cos(t) + \sin(t)\Big)\Big].$$

(ロ)、(型)、(E)、(E)、 E、 の(の)

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}\,y=g(t), \hspace{0.5cm} y(0)=0, \hspace{0.5cm} g(t)= egin{cases} \sin(t) & t\in[0,\pi)\ 0 & t\in[\pi,\infty). \end{cases}$$

Solution: Recall:

$$H(s) = \mathcal{L}\Big[\frac{4}{17}\Big(4e^{-t/2}\cos(t) + e^{-t/2}\sin(t) - 4\cos(t) + \sin(t)\Big)\Big].$$

Denote:

$$h(t) = \frac{4}{17} \Big[4e^{-t/2} \cos(t) + e^{-t/2} \sin(t) - 4\cos(t) + \sin(t) \Big].$$

◆□▶ ◆□▶ ◆臣▶ ◆臣▶ 三臣 - のへぐ

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}\,y=g(t), \hspace{0.5cm} y(0)=0, \hspace{0.5cm} g(t)= egin{cases} \sin(t) & t\in[0,\pi)\ 0 & t\in[\pi,\infty). \end{cases}$$

Solution: Recall:

$$H(s) = \mathcal{L}\Big[\frac{4}{17}\Big(4e^{-t/2}\cos(t) + e^{-t/2}\sin(t) - 4\cos(t) + \sin(t)\Big)\Big].$$

Denote:

$$h(t) = \frac{4}{17} \Big[4e^{-t/2} \cos(t) + e^{-t/2} \sin(t) - 4\cos(t) + \sin(t) \Big].$$

◆□▶ ◆□▶ ◆三▶ ◆三▶ 三三 のへぐ

Then, $H(s) = \mathcal{L}[h(t)]$.

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}\,y=g(t), \hspace{0.5cm} y(0)=0, \hspace{0.5cm} g(t)= egin{cases} \sin(t) & t\in[0,\pi)\ 0 & t\in[\pi,\infty). \end{cases}$$

Solution: Recall:

$$H(s) = \mathcal{L}\Big[\frac{4}{17}\Big(4e^{-t/2}\cos(t) + e^{-t/2}\sin(t) - 4\cos(t) + \sin(t)\Big)\Big].$$

Denote:

$$h(t) = \frac{4}{17} \Big[4e^{-t/2} \cos(t) + e^{-t/2} \sin(t) - 4\cos(t) + \sin(t) \Big].$$

< □ > < 同 > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > <

Then, $H(s) = \mathcal{L}[h(t)]$. Recalling: $\mathcal{L}[y(t)] = H(s) + e^{-\pi s} H(s)$,

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}\,y=g(t), \hspace{0.5cm} y(0)=0, \hspace{0.5cm} g(t)= egin{cases} \sin(t) & t\in[0,\pi)\ 0 & t\in[\pi,\infty). \end{cases}$$

Solution: Recall:

$$H(s) = \mathcal{L}\Big[\frac{4}{17}\Big(4e^{-t/2}\cos(t) + e^{-t/2}\sin(t) - 4\cos(t) + \sin(t)\Big)\Big].$$

Denote:

$$h(t) = \frac{4}{17} \Big[4e^{-t/2} \cos(t) + e^{-t/2} \sin(t) - 4\cos(t) + \sin(t) \Big].$$

Then, $H(s) = \mathcal{L}[h(t)]$. Recalling: $\mathcal{L}[y(t)] = H(s) + e^{-\pi s} H(s)$,

 $\mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}[h(t)] + e^{-\pi s} \mathcal{L}[h(t)].$

< □ > < 同 > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > < □ > <

Example

Use the Laplace transform to find the solution of the IVP

$$y''+y'+rac{5}{4}\,y=g(t), \hspace{0.5cm} y(0)=0, \hspace{0.5cm} g(t)= egin{cases} \sin(t) & t\in[0,\pi)\ 0 & t\in[\pi,\infty). \end{cases}$$

Solution: Recall:

$$H(s) = \mathcal{L}\Big[\frac{4}{17}\Big(4e^{-t/2}\cos(t) + e^{-t/2}\sin(t) - 4\cos(t) + \sin(t)\Big)\Big].$$

Denote:

$$h(t) = \frac{4}{17} \Big[4e^{-t/2}\cos(t) + e^{-t/2}\sin(t) - 4\cos(t) + \sin(t) \Big].$$

Then, $H(s) = \mathcal{L}[h(t)]$. Recalling: $\mathcal{L}[y(t)] = H(s) + e^{-\pi s} H(s)$,

$$\mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}[h(t)] + e^{-\pi s} \mathcal{L}[h(t)].$$

We conclude: $y(t) = h(t) + u(t - \pi)h(t - \pi)$.

・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・

Generalized sources (Sect. 4.4).

- ► The Dirac delta generalized function.
- Properties of Dirac's delta.
- Relation between deltas and steps.
- Dirac's delta in Physics.
- ► The Laplace Transform of Dirac's delta.
- Differential equations with Dirac's delta sources.

▲ロト ▲帰 ト ▲ヨト ▲ヨト 三三 - のへぐ

Generalized sources (Sect. 4.4).

► The Dirac delta generalized function.

- Properties of Dirac's delta.
- Relation between deltas and steps.
- Dirac's delta in Physics.
- The Laplace Transform of Dirac's delta.
- Differential equations with Dirac's delta sources.

▲ロト ▲帰 ト ▲ヨト ▲ヨト 三三 - のへぐ

Definition

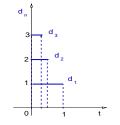
Consider the sequence of functions for $n \ge 1$,

$$\delta_n(t) = \left\{egin{array}{cc} 0, & t < 0 \ n, & 0 \leqslant t \leqslant rac{1}{n} \ 0, & t > rac{1}{n}. \end{array}
ight.$$

Definition

Consider the sequence of functions for $n \ge 1$,

$$\delta_n(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ n, & 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 0, & t > \frac{1}{n}. \end{cases}$$

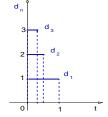


▲ロト ▲圖 ト ▲ ヨト ▲ ヨト ― ヨー つくぐ

Definition

Consider the sequence of functions for $n \ge 1$,

$$\delta_n(t) = \left\{ egin{array}{ll} 0, & t < 0 \ n, & 0 \leqslant t \leqslant rac{1}{n} \ 0, & t > rac{1}{n}. \end{array}
ight.$$



◆□▶ ◆□▶ ◆□▶ ◆□▶ → □ ◇ ◇ ◇

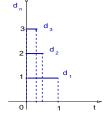
The Dirac delta generalized function is given by

$$\lim_{n\to\infty}\delta_n(t)=\delta(t),\qquad t\in\mathbb{R}.$$

Definition

Consider the sequence of functions for $n \ge 1$,

$$\delta_n(t) = \left\{ egin{array}{cc} 0, & t < 0 \ n, & 0 \leqslant t \leqslant rac{1}{n} \ 0, & t > rac{1}{n}. \end{array}
ight.$$



◆□▶ ◆□▶ ◆□▶ ◆□▶ → □ ◇ ◇ ◇

The Dirac delta generalized function is given by

$$\lim_{n\to\infty}\delta_n(t)=\delta(t),\qquad t\in\mathbb{R}.$$

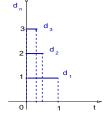
Remarks:

(a) There exist infinitely many sequences δ_n that define the same generalized function δ .

Definition

Consider the sequence of functions for $n \ge 1$,

$$\delta_n(t) = \left\{ egin{array}{cc} 0, & t < 0 \ n, & 0 \leqslant t \leqslant rac{1}{n} \ 0, & t > rac{1}{n}. \end{array}
ight.$$



The Dirac delta generalized function is given by

$$\lim_{n\to\infty}\delta_n(t)=\delta(t),\qquad t\in\mathbb{R}.$$

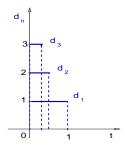
Remarks:

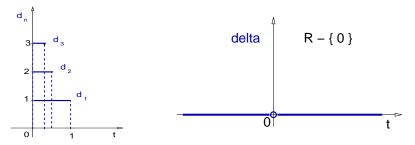
(a) There exist infinitely many sequences δ_n that define the same generalized function δ .

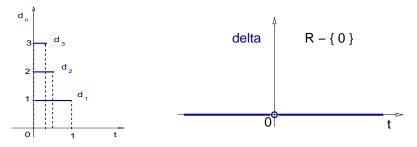
(b) For example, compare with the sequences δ_n in the literature.

・ロト ・聞ト ・ヨト ・ヨト

æ



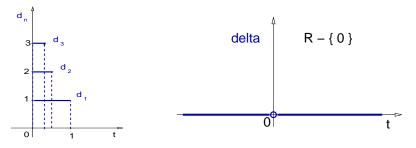




Remarks:

(a) The Dirac δ is a function on the domain $\mathbb{R} - \{0\}$, and $\delta(t) = 0$ for $t \in \mathbb{R} - \{0\}$.

◆□▶ ◆□▶ ◆三▶ ◆三▶ 三三 のへで

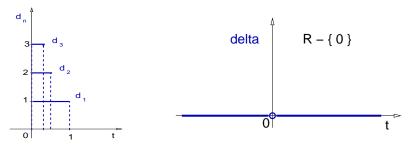


Remarks:

(a) The Dirac δ is a function on the domain $\mathbb{R} - \{0\}$, and $\delta(t) = 0$ for $t \in \mathbb{R} - \{0\}$.

(b) δ at t = 0 is not defined, since $\delta(0) = \lim_{n \to \infty} n = +\infty$.

・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・



Remarks:

(a) The Dirac δ is a function on the domain $\mathbb{R} - \{0\}$, and $\delta(t) = 0$ for $t \in \mathbb{R} - \{0\}$.

(b) δ at t = 0 is not defined, since $\delta(0) = \lim_{n \to \infty} n = +\infty$.

・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・

(c) δ is not a function on \mathbb{R} .

Generalized sources (Sect. 4.4).

- ► The Dirac delta generalized function.
- Properties of Dirac's delta.
- Relation between deltas and steps.
- Dirac's delta in Physics.
- The Laplace Transform of Dirac's delta.
- Differential equations with Dirac's delta sources.

▲ロト ▲帰 ト ▲ヨト ▲ヨト - ヨ - の々ぐ

Remark: The Dirac δ is not a function on \mathbb{R} .

(ロ)、(型)、(E)、(E)、 E、 の(の)

Remark: The Dirac δ is not a function on \mathbb{R} .

We define operations on Dirac's δ as limits $n \to \infty$ of the operation on the sequence elements δ_n .

Remark: The Dirac δ is not a function on \mathbb{R} .

We define operations on Dirac's δ as limits $n \to \infty$ of the operation on the sequence elements δ_n .

Definition

$$\delta(t-c) = \lim_{n\to\infty} \delta_n(t-c),$$

Remark: The Dirac δ is not a function on \mathbb{R} .

We define operations on Dirac's δ as limits $n \to \infty$ of the operation on the sequence elements δ_n .

Definition

$$\delta(t-c) = \lim_{n\to\infty} \delta_n(t-c),$$

 $a \delta(t) + b \delta(t) = \lim_{n \to \infty} [a \delta_n(t) + b \delta_n(t)],$

◆□▶ ◆□▶ ◆三▶ ◆三▶ 三三 のへぐ

Remark: The Dirac δ is not a function on \mathbb{R} .

We define operations on Dirac's δ as limits $n \to \infty$ of the operation on the sequence elements δ_n .

Definition

$$\delta(t-c) = \lim_{n\to\infty} \delta_n(t-c),$$

$$a \,\delta(t) + b \,\delta(t) = \lim_{n \to \infty} \left[a \,\delta_n(t) + b \,\delta_n(t) \right],$$
$$f(t) \,\delta(t) = \lim_{n \to \infty} \left[f(t) \,\delta_n(t) \right],$$

Remark: The Dirac δ is not a function on \mathbb{R} .

We define operations on Dirac's δ as limits $n \to \infty$ of the operation on the sequence elements δ_n .

Definition

$$\delta(t-c) = \lim_{n \to \infty} \delta_n(t-c),$$

$$a \,\delta(t) + b \,\delta(t) = \lim_{n \to \infty} \left[a \,\delta_n(t) + b \,\delta_n(t) \right],$$

$$f(t) \,\delta(t) = \lim_{n \to \infty} \left[f(t) \,\delta_n(t) \right],$$

$$\int_a^b \delta(t) \,dt = \lim_{n \to \infty} \int_a^b \delta_n(t) \,dt,$$

◆□▶ ◆□▶ ◆三▶ ◆三▶ 三三 のへ⊙

Remark: The Dirac δ is not a function on \mathbb{R} .

We define operations on Dirac's δ as limits $n \to \infty$ of the operation on the sequence elements δ_n .

Definition

$$\delta(t-c) = \lim_{n \to \infty} \delta_n(t-c),$$

$$a \,\delta(t) + b \,\delta(t) = \lim_{n \to \infty} \left[a \,\delta_n(t) + b \,\delta_n(t) \right],$$

$$f(t) \,\delta(t) = \lim_{n \to \infty} \left[f(t) \,\delta_n(t) \right],$$

$$\int_a^b \delta(t) \,dt = \lim_{n \to \infty} \int_a^b \delta_n(t) \,dt,$$

$$\mathcal{L}[\delta] = \lim_{n \to \infty} \mathcal{L}[\delta_n].$$

Theorem

$$\int_{-a}^{a} \delta(t) \, dt = 1, \qquad a > 0.$$

◆□▶ ◆□▶ ◆臣▶ ◆臣▶ 三臣 - のへぐ

Theorem

$$\int_{-a}^{a} \delta(t) \, dt = 1, \qquad a > 0.$$

Proof:

$$\int_{-a}^{a} \delta(t) \, dt$$

Theorem

$$\int_{-a}^{a} \delta(t) \, dt = 1, \qquad a > 0.$$

Proof:

$$\int_{-a}^{a} \delta(t) dt = \lim_{n \to \infty} \int_{-a}^{a} \delta_n(t) dt$$

Theorem

$$\int_{-a}^{a} \delta(t) dt = 1, \qquad a > 0.$$

Proof:

$$\int_{-a}^{a} \delta(t) dt = \lim_{n \to \infty} \int_{-a}^{a} \delta_n(t) dt = \lim_{n \to \infty} \int_{0}^{1/n} n dt$$

Theorem

$$\int_{-a}^{a} \delta(t) dt = 1, \qquad a > 0.$$

Proof:

$$\int_{-a}^{a} \delta(t) dt = \lim_{n \to \infty} \int_{-a}^{a} \delta_n(t) dt = \lim_{n \to \infty} \int_{0}^{1/n} n dt$$

◆□▶ ◆□▶ ◆臣▶ ◆臣▶ 三臣 - のへぐ

$$\int_{-a}^{a} \delta(t) dt = \lim_{n \to \infty} \left[n \left(t \Big|_{0}^{1/n} \right) \right]$$

Theorem

$$\int_{-a}^{a} \delta(t) dt = 1, \qquad a > 0.$$

Proof:

$$\int_{-a}^{a} \delta(t) dt = \lim_{n \to \infty} \int_{-a}^{a} \delta_n(t) dt = \lim_{n \to \infty} \int_{0}^{1/n} n dt$$

$$\int_{-a}^{a} \delta(t) dt = \lim_{n \to \infty} \left[n \left(t \Big|_{0}^{1/n} \right) \right] = \lim_{n \to \infty} \left[n \frac{1}{n} \right].$$

Theorem

$$\int_{-a}^{a} \delta(t) \, dt = 1, \qquad a > 0.$$

Proof:

$$\int_{-a}^{a} \delta(t) dt = \lim_{n \to \infty} \int_{-a}^{a} \delta_n(t) dt = \lim_{n \to \infty} \int_{0}^{1/n} n dt$$

$$\int_{-a}^{a} \delta(t) dt = \lim_{n \to \infty} \left[n \left(t \Big|_{0}^{1/n} \right) \right] = \lim_{n \to \infty} \left[n \frac{1}{n} \right].$$

◆□▶ ◆□▶ ◆臣▶ ◆臣▶ 三臣 - のへぐ

We conclude: $\int_{-a}^{a} \delta(t) dt = 1.$

Theorem

If $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is continuous, $t_0 \in \mathbb{R}$ and a > 0, then

$$\int_{t_0-a}^{t_0+a} \delta(t-t_0) f(t) dt = f(t_0).$$

◆□▶ ◆□▶ ◆□▶ ◆□▶ ○三 のへで

Theorem If $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is continuous, $t_0 \in \mathbb{R}$ and a > 0, then $\int_{t_0-a}^{t_0+a} \delta(t-t_0) f(t) dt = f(t_0).$

Proof: Introduce the change of variable $\tau = t - t_0$,

・ロト・日本・モート モー うへで

$$I=\int_{t_0-a}^{t_0+a}\delta(t-t_0)\,f(t)\,dt$$

Theorem If $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is continuous, $t_0 \in \mathbb{R}$ and a > 0, then $\int_{t_0-a}^{t_0+a} \delta(t-t_0) f(t) dt = f(t_0).$

Proof: Introduce the change of variable $\tau = t - t_0$,

$$I=\int_{t_0-a}^{t_0+a}\delta(t-t_0)\,f(t)\,dt=\int_{-a}^a\delta(\tau)\,f(\tau+t_0)\,d\tau,$$

・ロト・日本・モート モー うへで

Theorem If $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is continuous, $t_0 \in \mathbb{R}$ and a > 0, then $\int_{t_0-a}^{t_0+a} \delta(t-t_0) f(t) dt = f(t_0).$

Proof: Introduce the change of variable $\tau = t - t_0$,

$$I=\int_{t_0-a}^{t_0+a}\delta(t-t_0)f(t)\,dt=\int_{-a}^a\delta(\tau)\,f(\tau+t_0)\,d\tau,$$

・ロト・日本・モート モー うへで

$$I = \lim_{n \to \infty} \int_{-a}^{a} \delta_n(\tau) f(\tau + t_0) d\tau$$

Theorem If $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is continuous, $t_0 \in \mathbb{R}$ and a > 0, then $\int_{t_0-a}^{t_0+a} \delta(t-t_0) f(t) dt = f(t_0).$

Proof: Introduce the change of variable $\tau = t - t_0$,

$$I=\int_{t_0-a}^{t_0+a}\delta(t-t_0)\,f(t)\,dt=\int_{-a}^a\delta(\tau)\,f(\tau+t_0)\,d\tau,$$

 $I = \lim_{n \to \infty} \int_{-a}^{a} \delta_n(\tau) f(\tau + t_0) d\tau = \lim_{n \to \infty} \int_{0}^{1/n} n f(\tau + t_0) d\tau$

- ロ ト - 4 回 ト - 4 □ - 4

Theorem If $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is continuous, $t_0 \in \mathbb{R}$ and a > 0, then $\int_{t_0-a}^{t_0+a} \delta(t-t_0) f(t) dt = f(t_0).$

Proof: Introduce the change of variable $\tau = t - t_0$,

$$I=\int_{t_0-a}^{t_0+a}\delta(t-t_0)\,f(t)\,dt=\int_{-a}^a\delta(\tau)\,f(\tau+t_0)\,d\tau,$$

$$I = \lim_{n \to \infty} \int_{-a}^{a} \delta_n(\tau) f(\tau + t_0) d\tau = \lim_{n \to \infty} \int_{0}^{1/n} n f(\tau + t_0) d\tau$$

Therefore, $I = \lim_{n \to \infty} n \int_0^{1/n} F'(\tau + t_0) \, d\tau$,

Theorem If $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is continuous, $t_0 \in \mathbb{R}$ and a > 0, then $\int_{t_0-a}^{t_0+a} \delta(t-t_0) f(t) dt = f(t_0).$

Proof: Introduce the change of variable $\tau = t - t_0$,

$$I=\int_{t_0-a}^{t_0+a}\delta(t-t_0)f(t)\,dt=\int_{-a}^a\delta(\tau)\,f(\tau+t_0)\,d\tau,$$

$$I = \lim_{n \to \infty} \int_{-a}^{a} \delta_n(\tau) f(\tau + t_0) d\tau = \lim_{n \to \infty} \int_{0}^{1/n} n f(\tau + t_0) d\tau$$

Therefore, $I = \lim_{n \to \infty} n \int_0^{1/n} F'(\tau + t_0) d\tau$, where we introduced the primitive $F(t) = \int f(t) dt$, that is, f(t) = F'(t).

Theorem If $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is continuous, $t_0 \in \mathbb{R}$ and a > 0, then $\int_{t_0-a}^{t_0+a} \delta(t-t_0) f(t) dt = f(t_0).$ Proof: So, $I = \lim_{n \to \infty} n \int_0^{1/n} F'(\tau + t_0) d\tau$, with f(t) = F'(t).

・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・

Theorem If $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is continuous, $t_0 \in \mathbb{R}$ and a > 0, then $\int_{t_0-a}^{t_0+a} \delta(t-t_0) f(t) dt = f(t_0).$ Proof: So, $I = \lim_{n \to \infty} n \int_0^{1/n} F'(\tau + t_0) d\tau$, with f(t) = F'(t). $I = \lim_{n \to \infty} n \left[F(\tau + t_0) \Big|_0^{1/n} \right]$

◆□▶ ◆□▶ ◆臣▶ ◆臣▶ 三臣 - のへ⊙

Theorem If $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is continuous, $t_0 \in \mathbb{R}$ and a > 0, then $\int_{t_0-a}^{t_0+a} \delta(t-t_0) f(t) dt = f(t_0).$ Proof: So, $I = \lim_{n \to \infty} n \int_0^{1/n} F'(\tau + t_0) d\tau$, with f(t) = F'(t). $I = \lim_{n \to \infty} n \left[F(\tau + t_0) \Big|_0^{1/n} \right] = \lim_{n \to \infty} n \left[F\left(t_0 + \frac{1}{n}\right) - F(t_0) \right].$

▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□ ● ●

Theorem If $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is continuous, $t_0 \in \mathbb{R}$ and a > 0, then $\int_{t_0}^{t_0+a} \delta(t-t_0) f(t) dt = f(t_0).$ Proof: So, $I = \lim_{n \to \infty} n \int_0^{1/n} F'(\tau + t_0) d\tau$, with f(t) = F'(t). $I = \lim_{n \to \infty} n \left[F(\tau + t_0) \Big|_{0}^{1/n} \right] = \lim_{n \to \infty} n \left[F\left(t_0 + \frac{1}{n}\right) - F(t_0) \right].$ $I = \lim_{n \to \infty} \frac{\left[F\left(t_0 + \frac{1}{n}\right) - F(t_0) \right]}{1}$

・ロト・(部・・モー・(中・・日・)

Theorem If $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is continuous, $t_0 \in \mathbb{R}$ and a > 0, then $\int_{t=0}^{t_0+a} \delta(t-t_0) f(t) dt = f(t_0).$ Proof: So, $I = \lim_{n \to \infty} n \int_0^{1/n} F'(\tau + t_0) d\tau$, with f(t) = F'(t). $I = \lim_{n \to \infty} n \left[F(\tau + t_0) \Big|_0^{1/n} \right] = \lim_{n \to \infty} n \left[F\left(t_0 + \frac{1}{n}\right) - F(t_0) \right].$ $I = \lim_{n \to \infty} \frac{\left[F\left(t_0 + \frac{1}{n}\right) - F(t_0)\right]}{1} = F'(t_0)$

◆□▶ ◆□▶ ◆三▶ ◆三▶ ◆□▶

Theorem If $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is continuous, $t_0 \in \mathbb{R}$ and a > 0, then $\int_{t_0}^{t_0+a} \delta(t-t_0) f(t) dt = f(t_0).$ Proof: So, $I = \lim_{n \to \infty} n \int_{0}^{1/n} F'(\tau + t_0) d\tau$, with f(t) = F'(t). $I = \lim_{n \to \infty} n \left[F(\tau + t_0) \Big|_0^{1/n} \right] = \lim_{n \to \infty} n \left[F\left(t_0 + \frac{1}{n}\right) - F(t_0) \right].$ $I=\lim_{n
ightarrow\infty}rac{\left[ar{F}ig(t_0+rac{1}{n}ig)-ar{F}(t_0)
ight]}{1}=F'(t_0)=f(t_0).$

・ロト・西ト・モート 一日 - シック

Theorem If $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is continuous, $t_0 \in \mathbb{R}$ and a > 0, then $\int_{t_0}^{t_0+a} \delta(t-t_0) f(t) dt = f(t_0).$ Proof: So, $I = \lim_{n \to \infty} n \int_{0}^{1/n} F'(\tau + t_0) d\tau$, with f(t) = F'(t). $I = \lim_{n \to \infty} n \left[F(\tau + t_0) \Big|_0^{1/n} \right] = \lim_{n \to \infty} n \left[F\left(t_0 + \frac{1}{n}\right) - F(t_0) \right].$ $I = \lim_{n \to \infty} \frac{\left[F\left(t_0 + \frac{1}{n}\right) - F(t_0)\right]}{1} = F'(t_0) = f(t_0).$ We conclude: $\int_{t_0+a}^{t_0+a} \delta(t-t_0) f(t) dt = f(t_0).$

Generalized sources (Sect. 4.4).

- ▶ The Dirac delta generalized function.
- Properties of Dirac's delta.
- Relation between deltas and steps.
- Dirac's delta in Physics.
- ► The Laplace Transform of Dirac's delta.
- Differential equations with Dirac's delta sources.

Theorem

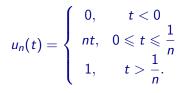
The sequence of functions for $n \ge 1$,

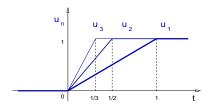
◆□▶ ◆□▶ ◆臣▶ ◆臣▶ 三臣 - のへぐ

$$u_n(t) = \begin{cases} 0, & t < 0\\ nt, & 0 \leq t \leq \frac{1}{n}\\ 1, & t > \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Theorem

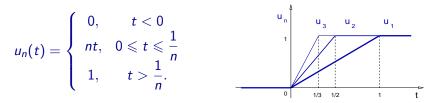
The sequence of functions for $n \ge 1$,





Theorem

The sequence of functions for $n \ge 1$,

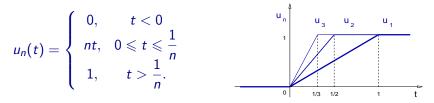


satisfies, for $t \in (-\infty, 0) \cup (0, 1/n) \cup (1/n, \infty)$, both equations,

 $u_n'(t) = \delta_n(t), \qquad \lim_{n \to \infty} u_n(t) = u(t), \qquad t \in \mathbb{R}.$

Theorem

The sequence of functions for $n \ge 1$,



satisfies, for $t \in (-\infty, 0) \cup (0, 1/n) \cup (1/n, \infty)$, both equations,

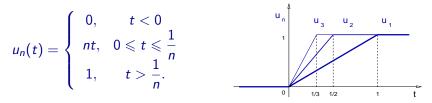
 $u_n'(t) = \delta_n(t), \qquad \lim_{n \to \infty} u_n(t) = u(t), \qquad t \in \mathbb{R}.$

Remark:

• If we generalize the notion of derivative as $u'(t) = \lim_{n \to \infty} u'_n(t)$, then holds $u'(t) = \delta(t)$.

Theorem

The sequence of functions for $n \ge 1$,



satisfies, for $t \in (-\infty, 0) \cup (0, 1/n) \cup (1/n, \infty)$, both equations,

 $u_n'(t) = \delta_n(t), \qquad \lim_{n \to \infty} u_n(t) = u(t), \qquad t \in \mathbb{R}.$

Remark:

• If we generalize the notion of derivative as $u'(t) = \lim_{n \to \infty} u'_n(t)$, then holds $u'(t) = \delta(t)$.

Dirac's delta is a generalized derivative of the step function.

Generalized sources (Sect. 4.4).

- ► The Dirac delta generalized function.
- Properties of Dirac's delta.
- Relation between deltas and steps.
- Dirac's delta in Physics.
- ► The Laplace Transform of Dirac's delta.
- Differential equations with Dirac's delta sources.

▲ロト ▲帰 ト ▲ヨト ▲ヨト 三三 - のへぐ

Remarks:

(a) Dirac's delta generalized function is useful to describe *impulsive forces* in mechanical systems.

◆□▶ ◆□▶ ◆□▶ ◆□▶ □□ - のへぐ

Remarks:

- (a) Dirac's delta generalized function is useful to describe *impulsive forces* in mechanical systems.
- (b) An impulsive force transmits a finite momentum in an infinitely short time.

Remarks:

- (a) Dirac's delta generalized function is useful to describe *impulsive forces* in mechanical systems.
- (b) An impulsive force transmits a finite momentum in an infinitely short time.
- (c) For example: The momentum transmitted to a pendulum when hit by a hammer.

Remarks:

- (a) Dirac's delta generalized function is useful to describe *impulsive forces* in mechanical systems.
- (b) An impulsive force transmits a finite momentum in an infinitely short time.
- (c) For example: The momentum transmitted to a pendulum when hit by a hammer. Newton's law of motion says,

mv'(t) = F(t),

Remarks:

- (a) Dirac's delta generalized function is useful to describe *impulsive forces* in mechanical systems.
- (b) An impulsive force transmits a finite momentum in an infinitely short time.
- (c) For example: The momentum transmitted to a pendulum when hit by a hammer. Newton's law of motion says,

mv'(t) = F(t), with $F(t) = F_0 \delta(t - t_0)$.

Remarks:

- (a) Dirac's delta generalized function is useful to describe *impulsive forces* in mechanical systems.
- (b) An impulsive force transmits a finite momentum in an infinitely short time.
- (c) For example: The momentum transmitted to a pendulum when hit by a hammer. Newton's law of motion says,

$$mv'(t) = F(t)$$
, with $F(t) = F_0 \delta(t - t_0)$.

・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・

The momentum transfer is:

$$\Delta I = \lim_{\Delta t \to 0} mv(t) \Big|_{t_0 - \Delta t}^{t_0 + \Delta t}$$

Remarks:

- (a) Dirac's delta generalized function is useful to describe *impulsive forces* in mechanical systems.
- (b) An impulsive force transmits a finite momentum in an infinitely short time.
- (c) For example: The momentum transmitted to a pendulum when hit by a hammer. Newton's law of motion says,

$$mv'(t) = F(t)$$
, with $F(t) = F_0 \delta(t - t_0)$.

・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・

The momentum transfer is:

$$\Delta I = \lim_{\Delta t \to 0} mv(t) \Big|_{t_0 - \Delta t}^{t_0 + \Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \int_{t_0 - \Delta t}^{t_0 + \Delta t} F(t) dt$$

Remarks:

- (a) Dirac's delta generalized function is useful to describe *impulsive forces* in mechanical systems.
- (b) An impulsive force transmits a finite momentum in an infinitely short time.
- (c) For example: The momentum transmitted to a pendulum when hit by a hammer. Newton's law of motion says,

$$mv'(t) = F(t)$$
, with $F(t) = F_0 \delta(t - t_0)$.

The momentum transfer is:

$$\Delta I = \lim_{\Delta t \to 0} mv(t) \Big|_{t_0 - \Delta t}^{t_0 + \Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \int_{t_0 - \Delta t}^{t_0 + \Delta t} F(t) dt = F_0.$$

くしゃ 本語 * 本語 * 本語 * 人口 *

Remarks:

- (a) Dirac's delta generalized function is useful to describe *impulsive forces* in mechanical systems.
- (b) An impulsive force transmits a finite momentum in an infinitely short time.
- (c) For example: The momentum transmitted to a pendulum when hit by a hammer. Newton's law of motion says,

$$mv'(t) = F(t)$$
, with $F(t) = F_0 \delta(t - t_0)$.

The momentum transfer is:

$$\Delta I = \lim_{\Delta t \to 0} mv(t) \Big|_{t_0 - \Delta t}^{t_0 + \Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \int_{t_0 - \Delta t}^{t_0 + \Delta t} F(t) dt = F_0.$$

・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・

That is, $\Delta I = F_0$.

Generalized sources (Sect. 4.4).

- ► The Dirac delta generalized function.
- Properties of Dirac's delta.
- Relation between deltas and steps.
- Dirac's delta in Physics.
- ► The Laplace Transform of Dirac's delta.
- Differential equations with Dirac's delta sources.

Recall: The Laplace Transform can be generalized from functions to $\delta,$

Recall: The Laplace Transform can be generalized from functions to δ , as follows, $\mathcal{L}[\delta(t-c)] = \lim_{n \to \infty} \mathcal{L}[\delta_n(t-c)].$

Recall: The Laplace Transform can be generalized from functions to δ , as follows, $\mathcal{L}[\delta(t-c)] = \lim_{n \to \infty} \mathcal{L}[\delta_n(t-c)].$

Theorem

 $\mathcal{L}[\delta(t-c)] = e^{-cs}.$

- ロ ト - 4 回 ト - 4 □ - 4

Recall: The Laplace Transform can be generalized from functions to δ , as follows, $\mathcal{L}[\delta(t-c)] = \lim_{n \to \infty} \mathcal{L}[\delta_n(t-c)].$

Theorem

$$\mathcal{L}[\delta(t-c)]=e^{-cs}.$$

Proof:

$$\mathcal{L}[\delta(t-c)] = \lim_{n\to\infty} \mathcal{L}[\delta_n(t-c)],$$

Recall: The Laplace Transform can be generalized from functions to δ , as follows, $\mathcal{L}[\delta(t-c)] = \lim_{n \to \infty} \mathcal{L}[\delta_n(t-c)].$

Theorem

 $\mathcal{L}[\delta(t-c)]=e^{-cs}.$

Proof:

 $\mathcal{L}[\delta(t-c)] = \lim_{n\to\infty} \mathcal{L}[\delta_n(t-c)], \qquad \delta_n(t) = n\left[u(t) - u\left(t-\frac{1}{n}\right)\right].$

・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・

Recall: The Laplace Transform can be generalized from functions to δ , as follows, $\mathcal{L}[\delta(t-c)] = \lim_{n \to \infty} \mathcal{L}[\delta_n(t-c)].$

Theorem

$$\mathcal{L}[\delta(t-c)]=e^{-cs}.$$

Proof:

$$\mathcal{L}[\delta(t-c)] = \lim_{n \to \infty} \mathcal{L}[\delta_n(t-c)], \qquad \delta_n(t) = n \left[u(t) - u(t-\frac{1}{n}) \right].$$
$$\mathcal{L}[\delta(t-c)] = \lim_{n \to \infty} n \left(\mathcal{L}[u(t-c)] - \mathcal{L}\left[u(t-c-\frac{1}{n}) \right] \right)$$

◆□▶ ◆□▶ ◆三▶ ◆三▶ 三三 のへぐ

Recall: The Laplace Transform can be generalized from functions to δ , as follows, $\mathcal{L}[\delta(t-c)] = \lim_{n \to \infty} \mathcal{L}[\delta_n(t-c)].$

Theorem

$$\mathcal{L}[\delta(t-c)]=e^{-cs}.$$

Proof:

$$\mathcal{L}[\delta(t-c)] = \lim_{n \to \infty} \mathcal{L}[\delta_n(t-c)], \qquad \delta_n(t) = n \left[u(t) - u(t - \frac{1}{n}) \right].$$
$$\mathcal{L}[\delta(t-c)] = \lim_{n \to \infty} n \left(\mathcal{L}[u(t-c)] - \mathcal{L}\left[u(t-c - \frac{1}{n}) \right] \right)$$
$$\mathcal{L}[\delta(t-c)] = \lim_{n \to \infty} n \left(\frac{e^{-cs}}{s} - \frac{e^{-(c + \frac{1}{n})s}}{s} \right)$$

◆□▶ ◆□▶ ◆三▶ ◆三▶ 三三 のへぐ

Recall: The Laplace Transform can be generalized from functions to δ , as follows, $\mathcal{L}[\delta(t-c)] = \lim_{n \to \infty} \mathcal{L}[\delta_n(t-c)].$

Theorem

$$\mathcal{L}[\delta(t-c)]=e^{-cs}.$$

Proof:

$$\mathcal{L}[\delta(t-c)] = \lim_{n \to \infty} \mathcal{L}[\delta_n(t-c)], \qquad \delta_n(t) = n \left[u(t) - u(t - \frac{1}{n}) \right].$$
$$\mathcal{L}[\delta(t-c)] = \lim_{n \to \infty} n \left(\mathcal{L}[u(t-c)] - \mathcal{L}\left[u(t-c - \frac{1}{n}) \right] \right)$$
$$\mathcal{L}[\delta(t-c)] = \lim_{n \to \infty} n \left(\frac{e^{-cs}}{s} - \frac{e^{-(c + \frac{1}{n})s}}{s} \right) = e^{-cs} \lim_{n \to \infty} \frac{(1 - e^{-\frac{s}{n}})}{(\frac{s}{n})}.$$

◆□▶ ◆□▶ ◆三▶ ◆三▶ 三三 のへ⊙

Recall: The Laplace Transform can be generalized from functions to δ , as follows, $\mathcal{L}[\delta(t-c)] = \lim_{n \to \infty} \mathcal{L}[\delta_n(t-c)].$

Theorem

$$\mathcal{L}[\delta(t-c)]=e^{-cs}.$$

-

・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・

Proof:

$$\mathcal{L}[\delta(t-c)] = \lim_{n \to \infty} \mathcal{L}[\delta_n(t-c)], \qquad \delta_n(t) = n \left[u(t) - u(t - \frac{1}{n}) \right].$$
$$\mathcal{L}[\delta(t-c)] = \lim_{n \to \infty} n \left(\mathcal{L}[u(t-c)] - \mathcal{L}\left[u(t-c - \frac{1}{n}) \right] \right)$$
$$\mathcal{L}[\delta(t-c)] = \lim_{n \to \infty} n \left(\frac{e^{-cs}}{s} - \frac{e^{-(c + \frac{1}{n})s}}{s} \right) = e^{-cs} \lim_{n \to \infty} \frac{(1 - e^{-\frac{s}{n}})}{(\frac{s}{n})}.$$

This is a singular limit, $\frac{0}{0}$.

Recall: The Laplace Transform can be generalized from functions to δ , as follows, $\mathcal{L}[\delta(t-c)] = \lim_{n \to \infty} \mathcal{L}[\delta_n(t-c)].$

Theorem

$$\mathcal{L}[\delta(t-c)]=e^{-cs}.$$

Proof:

$$\mathcal{L}[\delta(t-c)] = \lim_{n \to \infty} \mathcal{L}[\delta_n(t-c)], \qquad \delta_n(t) = n \left[u(t) - u(t - \frac{1}{n}) \right].$$
$$\mathcal{L}[\delta(t-c)] = \lim_{n \to \infty} n \left(\mathcal{L}[u(t-c)] - \mathcal{L}\left[u(t-c - \frac{1}{n}) \right] \right)$$
$$\mathcal{L}[\delta(t-c)] = \lim_{n \to \infty} n \left(\frac{e^{-cs}}{s} - \frac{e^{-(c + \frac{1}{n})s}}{s} \right) = e^{-cs} \lim_{n \to \infty} \frac{(1 - e^{-\frac{s}{n}})}{(\frac{s}{n})}.$$

This is a singular limit, $\frac{0}{0}$. Use l'Hôpital rule.

-

Proof: Recall:
$$\mathcal{L}[\delta(t-c)] = e^{-cs} \lim_{n \to \infty} \frac{(1-e^{-\frac{s}{n}})}{(\frac{s}{n})}.$$

<□ > < @ > < E > < E > E のQ @

Proof: Recall:
$$\mathcal{L}[\delta(t-c)] = e^{-cs} \lim_{n \to \infty} \frac{(1-e^{-\frac{s}{n}})}{\left(\frac{s}{n}\right)}$$
.
$$\lim_{n \to \infty} \frac{(1-e^{-\frac{s}{n}})}{\left(\frac{s}{n}\right)}$$

<□ > < @ > < E > < E > E のQ @

Proof: Recall:
$$\mathcal{L}[\delta(t-c)] = e^{-cs} \lim_{n \to \infty} \frac{(1-e^{-\frac{s}{n}})}{\left(\frac{s}{n}\right)}$$
.
$$\lim_{n \to \infty} \frac{(1-e^{-\frac{s}{n}})}{\left(\frac{s}{n}\right)} = \lim_{n \to \infty} \frac{(-\frac{s}{n^2}e^{-\frac{s}{n}})}{(-\frac{s}{n^2})}$$

<□ > < @ > < E > < E > E のQ @

Proof: Recall:
$$\mathcal{L}[\delta(t-c)] = e^{-cs} \lim_{n \to \infty} \frac{(1-e^{-\frac{s}{n}})}{\left(\frac{s}{n}\right)}.$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(1-e^{-\frac{s}{n}})}{\left(\frac{s}{n}\right)} = \lim_{n \to \infty} \frac{(-\frac{s}{n^2}e^{-\frac{s}{n}})}{(-\frac{s}{n^2})} = \lim_{n \to \infty} e^{-\frac{s}{n}}.$$

(ロ)、

Proof: Recall:
$$\mathcal{L}[\delta(t-c)] = e^{-cs} \lim_{n \to \infty} \frac{(1-e^{-\frac{s}{n}})}{\left(\frac{s}{n}\right)}$$
.
$$\lim_{n \to \infty} \frac{(1-e^{-\frac{s}{n}})}{\left(\frac{s}{n}\right)} = \lim_{n \to \infty} \frac{(-\frac{s}{n^2}e^{-\frac{s}{n}})}{(-\frac{s}{n^2})} = \lim_{n \to \infty} e^{-\frac{s}{n}} = 1.$$

(ロ)、

Proof: Recall:
$$\mathcal{L}[\delta(t-c)] = e^{-cs} \lim_{n \to \infty} \frac{(1-e^{-\frac{s}{n}})}{\left(\frac{s}{n}\right)}.$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(1-e^{-\frac{s}{n}})}{\left(\frac{s}{n}\right)} = \lim_{n \to \infty} \frac{(-\frac{s}{n^2}e^{-\frac{s}{n}})}{(-\frac{s}{n^2})} = \lim_{n \to \infty} e^{-\frac{s}{n}} = 1.$$

◆□▶ ◆□▶ ◆臣▶ ◆臣▶ 三臣 - のへぐ

We therefore conclude that $\mathcal{L}[\delta(t-c)] = e^{-cs}$.

Proof: Recall:
$$\mathcal{L}[\delta(t-c)] = e^{-cs} \lim_{n \to \infty} \frac{(1-e^{-\frac{s}{n}})}{\left(\frac{s}{n}\right)}.$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(1-e^{-\frac{s}{n}})}{\left(\frac{s}{n}\right)} = \lim_{n \to \infty} \frac{(-\frac{s}{n^2}e^{-\frac{s}{n}})}{(-\frac{s}{n^2})} = \lim_{n \to \infty} e^{-\frac{s}{n}} = 1.$$

◆□▶ <□▶ < □▶ < □▶ < □▶ = - のへで</p>

We therefore conclude that $\mathcal{L}[\delta(t-c)] = e^{-cs}$.

Remarks:

(a) This result is consistent with a previous result:

Proof: Recall:
$$\mathcal{L}[\delta(t-c)] = e^{-cs} \lim_{n \to \infty} \frac{(1-e^{-\frac{s}{n}})}{\left(\frac{s}{n}\right)}.$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(1-e^{-\frac{s}{n}})}{\left(\frac{s}{n}\right)} = \lim_{n \to \infty} \frac{(-\frac{s}{n^2}e^{-\frac{s}{n}})}{(-\frac{s}{n^2})} = \lim_{n \to \infty} e^{-\frac{s}{n}} = 1.$$

▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□ ▶ ④ ●

We therefore conclude that $\mathcal{L}[\delta(t-c)] = e^{-cs}$.

Remarks:

(a) This result is consistent with a previous result:

$$\int_{t_0-a}^{t_0+a} \delta(t-t_0) f(t) dt = f(t_0).$$

Proof: Recall:
$$\mathcal{L}[\delta(t-c)] = e^{-cs} \lim_{n \to \infty} \frac{(1-e^{-\frac{s}{n}})}{\left(\frac{s}{n}\right)}.$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(1-e^{-\frac{s}{n}})}{\left(\frac{s}{n}\right)} = \lim_{n \to \infty} \frac{(-\frac{s}{n^2}e^{-\frac{s}{n}})}{(-\frac{s}{n^2})} = \lim_{n \to \infty} e^{-\frac{s}{n}} = 1.$$

・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・

We therefore conclude that $\mathcal{L}[\delta(t-c)] = e^{-cs}$.

Remarks:

(a) This result is consistent with a previous result: $\int_{t_0-a}^{t_0+a} \delta(t-t_0) f(t) dt = f(t_0).$ (b) $\mathcal{L}[\delta(t-c)] = \int_0^\infty \delta(t-c) e^{-st} dt = e^{-cs}.$

Proof: Recall:
$$\mathcal{L}[\delta(t-c)] = e^{-cs} \lim_{n \to \infty} \frac{(1-e^{-\frac{s}{n}})}{\left(\frac{s}{n}\right)}.$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(1-e^{-\frac{s}{n}})}{\left(\frac{s}{n}\right)} = \lim_{n \to \infty} \frac{(-\frac{s}{n^2}e^{-\frac{s}{n}})}{(-\frac{s}{n^2})} = \lim_{n \to \infty} e^{-\frac{s}{n}} = 1.$$

We therefore conclude that $\mathcal{L}[\delta(t-c)] = e^{-cs}$.

Remarks:

(a) This result is consistent with a previous result: $\int_{t_0-a}^{t_0+a} \delta(t-t_0) f(t) dt = f(t_0).$ (b) $\mathcal{L}[\delta(t-c)] = \int_0^{\infty} \delta(t-c) e^{-st} dt = e^{-cs}.$ (c) $\mathcal{L}[\delta(t-c) f(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t-c) e^{-st} f(t) dt = e^{-cs} f(c).$

(日) (同) (三) (三) (三) (○) (○)

Generalized sources (Sect. 4.4).

- ► The Dirac delta generalized function.
- Properties of Dirac's delta.
- Relation between deltas and steps.
- Dirac's delta in Physics.
- ► The Laplace Transform of Dirac's delta.
- ► Differential equations with Dirac's delta sources.

Example

Find the solution y to the initial value problem

$$y'' - y = -20 \,\delta(t - 3), \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0.$$

▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□ ▶ ④ ●

Example

Find the solution y to the initial value problem

$$y'' - y = -20 \,\delta(t-3), \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0.$$

▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□ ▶ ④ ●

Solution: Compute: $\mathcal{L}[y''] - \mathcal{L}[y] = -20 \mathcal{L}[\delta(t-3)].$

Example

Find the solution y to the initial value problem

$$y'' - y = -20 \,\delta(t-3), \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0.$$

▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□ ▶ ④ ●

Solution: Compute: $\mathcal{L}[y''] - \mathcal{L}[y] = -20 \mathcal{L}[\delta(t-3)].$

$$\mathcal{L}[y''] = s^2 \mathcal{L}[y] - s y(0) - y'(0)$$

Example

Find the solution y to the initial value problem

$$y'' - y = -20 \,\delta(t-3), \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0.$$

Solution: Compute: $\mathcal{L}[y''] - \mathcal{L}[y] = -20 \mathcal{L}[\delta(t-3)].$

$$\mathcal{L}[y''] = s^2 \mathcal{L}[y] - s y(0) - y'(0) \quad \Rightarrow \quad (s^2 - 1) \mathcal{L}[y] - s = -20 e^{-3s},$$

▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□ ▶ ④ ●

Example

Find the solution y to the initial value problem

$$y'' - y = -20 \,\delta(t-3), \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0.$$

Solution: Compute: $\mathcal{L}[y''] - \mathcal{L}[y] = -20 \mathcal{L}[\delta(t-3)].$

$$\mathcal{L}[y''] = s^2 \mathcal{L}[y] - s y(0) - y'(0) \quad \Rightarrow \quad (s^2 - 1) \mathcal{L}[y] - s = -20 e^{-3s},$$

We arrive to the equation $\mathcal{L}[y] = \frac{s}{(s^2-1)} - 20 e^{-3s} \frac{1}{(s^2-1)}$,

・ロト ・ 画 ・ ・ 画 ・ ・ 画 ・ うらぐ

Example

Find the solution y to the initial value problem

$$y'' - y = -20 \,\delta(t-3), \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0.$$

Solution: Compute: $\mathcal{L}[y''] - \mathcal{L}[y] = -20 \mathcal{L}[\delta(t-3)].$

$$\mathcal{L}[y''] = s^2 \mathcal{L}[y] - s y(0) - y'(0) \quad \Rightarrow \quad (s^2 - 1) \mathcal{L}[y] - s = -20 e^{-3s},$$

We arrive to the equation
$$\mathcal{L}[y] = rac{s}{(s^2-1)} - 20 e^{-3s} rac{1}{(s^2-1)}$$
,

$$\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[\cosh(t)] - 20 \mathcal{L}[u(t-3) \sinh(t-3)],$$

▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□ ▶ ④ ●

Example

Find the solution y to the initial value problem

$$y'' - y = -20 \,\delta(t-3), \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0.$$

Solution: Compute: $\mathcal{L}[y''] - \mathcal{L}[y] = -20 \mathcal{L}[\delta(t-3)].$

$$\mathcal{L}[y''] = s^2 \mathcal{L}[y] - s y(0) - y'(0) \quad \Rightarrow \quad (s^2 - 1) \mathcal{L}[y] - s = -20 e^{-3s},$$

We arrive to the equation
$$\mathcal{L}[y] = rac{s}{(s^2-1)} - 20 e^{-3s} rac{1}{(s^2-1)}$$
,

$$\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[\cosh(t)] - 20 \mathcal{L}[u(t-3) \sinh(t-3)],$$

We conclude: $y(t) = \cosh(t) - 20 u(t-3) \sinh(t-3)$.

Example

Find the solution to the initial value problem

$$y'' + 4y = \delta(t - \pi) - \delta(t - 2\pi), \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0.$$

▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□ ▶ ④ ●

Example

Find the solution to the initial value problem

$$y'' + 4y = \delta(t - \pi) - \delta(t - 2\pi), \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0.$$

Solution: Compute: $\mathcal{L}[y''] + 4\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[\delta(t-\pi)] - \mathcal{L}[\delta(t-2\pi)],$

◆□▶ ◆□▶ ◆三▶ ◆三▶ 三三 のへぐ

Example

Find the solution to the initial value problem

$$y'' + 4y = \delta(t - \pi) - \delta(t - 2\pi), \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0.$$

Solution: Compute: $\mathcal{L}[y''] + 4\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[\delta(t-\pi)] - \mathcal{L}[\delta(t-2\pi)],$

◆□▶ ◆□▶ ◆三▶ ◆三▶ 三三 のへぐ

$$(s^{2}+4)\mathcal{L}[y] = e^{-\pi s} - e^{-2\pi s}$$

Example

Find the solution to the initial value problem

$$y'' + 4y = \delta(t - \pi) - \delta(t - 2\pi), \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0.$$

Solution: Compute: $\mathcal{L}[y''] + 4\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[\delta(t-\pi)] - \mathcal{L}[\delta(t-2\pi)]$,

$$(s^2+4) \mathcal{L}[y] = e^{-\pi s} - e^{-2\pi s} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}[y] = \frac{e^{-\pi s}}{(s^2+4)} - \frac{e^{-2\pi s}}{(s^2+4)},$$

◆□▶ ◆□▶ ◆三▶ ◆三▶ 三三 のへぐ

Example

Find the solution to the initial value problem

$$y'' + 4y = \delta(t - \pi) - \delta(t - 2\pi), \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0.$$

Solution: Compute: $\mathcal{L}[y''] + 4 \mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[\delta(t - \pi)] - \mathcal{L}[\delta(t - 2\pi)],$

$$(s^{2}+4)\mathcal{L}[y] = e^{-\pi s} - e^{-2\pi s} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}[y] = \frac{e^{-\pi s}}{(s^{2}+4)} - \frac{e^{-2\pi s}}{(s^{2}+4)},$$

- ロ ト - 4 回 ト - 4 □ - 4

that is, $\mathcal{L}[y] = rac{e^{-\pi s}}{2} rac{2}{(s^2+4)} - rac{e^{-2\pi s}}{2} rac{2}{(s^2+4)}.$

Example

Find the solution to the initial value problem

$$y'' + 4y = \delta(t - \pi) - \delta(t - 2\pi), \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0.$$

Solution: Compute: $\mathcal{L}[y''] + 4 \mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[\delta(t - \pi)] - \mathcal{L}[\delta(t - 2\pi)],$

$$(s^{2}+4)\mathcal{L}[y] = e^{-\pi s} - e^{-2\pi s} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}[y] = \frac{e^{-\pi s}}{(s^{2}+4)} - \frac{e^{-2\pi s}}{(s^{2}+4)},$$

that is, $\mathcal{L}[y] = rac{e^{-\pi s}}{2} rac{2}{(s^2+4)} - rac{e^{-2\pi s}}{2} rac{2}{(s^2+4)}.$

Recall: $e^{-cs} \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[u(t-c)f(t-c)].$

Example

Find the solution to the initial value problem

$$y'' + 4y = \delta(t - \pi) - \delta(t - 2\pi), \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0.$$

Solution: Compute: $\mathcal{L}[y''] + 4\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[\delta(t-\pi)] - \mathcal{L}[\delta(t-2\pi)]$,

$$(s^{2}+4)\mathcal{L}[y] = e^{-\pi s} - e^{-2\pi s} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}[y] = \frac{e^{-\pi s}}{(s^{2}+4)} - \frac{e^{-2\pi s}}{(s^{2}+4)},$$

that is,
$$\mathcal{L}[y] = rac{e^{-\pi s}}{2} rac{2}{(s^2+4)} - rac{e^{-2\pi s}}{2} rac{2}{(s^2+4)}.$$

Recall: $e^{-cs} \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[u(t-c) f(t-c)]$. Therefore,

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{2} \mathcal{L}\left[u(t-\pi) \sin\left[2(t-\pi)\right]\right] - \frac{1}{2} \mathcal{L}\left[u(t-2\pi) \sin\left[2(t-2\pi)\right]\right].$$

Example

Find the solution to the initial value problem

$$y'' + 4y = \delta(t - \pi) - \delta(t - 2\pi), \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0.$$

Solution: Recall:

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{2} \mathcal{L}\left[u(t-\pi) \sin\left[2(t-\pi)\right]\right] - \frac{1}{2} \mathcal{L}\left[u(t-2\pi) \sin\left[2(t-2\pi)\right]\right].$$

▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□ ▶ ④ ●

Example

Find the solution to the initial value problem

$$y'' + 4y = \delta(t - \pi) - \delta(t - 2\pi), \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0.$$

Solution: Recall:

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{2} \mathcal{L}\left[u(t-\pi) \sin\left[2(t-\pi)\right]\right] - \frac{1}{2} \mathcal{L}\left[u(t-2\pi) \sin\left[2(t-2\pi)\right]\right].$$

This implies that,

$$y(t) = \frac{1}{2}u(t-\pi)\sin[2(t-\pi)] - \frac{1}{2}u(t-2\pi)\sin[2(t-2\pi)],$$

◆□▶ <□▶ < □▶ < □▶ < □▶ = - のへで</p>

Example

Find the solution to the initial value problem

$$y'' + 4y = \delta(t - \pi) - \delta(t - 2\pi), \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0.$$

Solution: Recall:

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{2} \mathcal{L}\left[u(t-\pi) \sin\left[2(t-\pi)\right]\right] - \frac{1}{2} \mathcal{L}\left[u(t-2\pi) \sin\left[2(t-2\pi)\right]\right].$$

This implies that,

$$y(t) = \frac{1}{2} u(t-\pi) \sin[2(t-\pi)] - \frac{1}{2} u(t-2\pi) \sin[2(t-2\pi)],$$

We conclude: $y(t) = \frac{1}{2} [u(t - \pi) - u(t - 2\pi)] \sin(2t).$