



JOHANNES KEPLER
UNIVERSITÄT LINZ

Netzwerk für Forschung, Lehre und Praxis



Curvelets, Pseudo-Differentialoperatoren und die Wave Front Set

Diplomarbeit zur Erlangung des akademischen Grades *Diplomingenieur*

im *Diplomstudium Technische Mathematik*

Angefertigt am Institut für *Analysis*

Eingereicht von:

Stephan Walter Anzengruber

Betreuung:

A.Univ.-Prof.Dipl.-Ing.Dr. Paul F. X. Müller

Linz, Oktober 2007

Zusammenfassung

Die Schwerpunkte dieser Arbeit liegen auf der Analyse der Wave Front Set von Fourier Integral Operatoren (FIO), deren Ausbreitung im Spezialfall von polyhomogenen Pseudo-Differentialoperatoren, sowie auf einer gerichteten Transformation – der Curvelet Transformation – die es uns erlaubt die Wave Front Set zu lokalisieren.

Dabei sammeln wir in den ersten beiden Kapiteln Grundlegendes, das zum tieferen Verständnis vor allem von Pseudo-Differentialoperatoren (Ψ DO) und deren Symbolen beiträgt.

Das dritte Kapitel beinhaltet die formale Definition der Wave Front Set, sowie die Aussage, dass die singulären Punkte der Phase eines FIO Aufschluss über die Lage der Wave Front Set geben und nicht zuletzt den Beweis, dass die Wave Front Set der Lösung einer Differentialgleichung mit polyhomogenen Ψ DO, als Vereinigung von Bicharakteristiken des Hauptsymbols gegeben ist. Diese Aussage ist häufig unter dem Namen 'Propagation of Singularities' bekannt.

Im Anschluss daran stellen wir in Kapitel vier die Curvelet Transformation vor und beweisen, dass es genau die Punkte und Richtungen aus der Wave Front Set sind, in denen diese Transformation für zunehmend feinere Skalierungen keinen raschen Abfall aufweist.

Im fünften und letzten Kapitel diskretisieren wir die Curvelet Transformation in geeigneter Weise und zeigen, dass wir dadurch ein tight Frame erhalten, welches zu einer Wavelettransformation mit echter parabolischer Skalierung äquivalent ist.

Danksagung

Bedanken möchte ich mich bei meiner Mutter, Berti Anzengruber, dafür, dass sie es mir ermöglicht hat dieses Studium zu absolvieren, sowie auch bei meiner Großmutter, Berta Kothbauer, für ihre Unterstützung. Meiner Freundin, Aneta Kordala, möchte ich für die praktischen Tipps zur Erstellung von Computergrafiken danken.

Mein besonderer Dank gebührt Professor Paul F. X. Müller für seine Geduld und großartige Betreuung während der Erstellung dieser Arbeit.

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt bzw. die wörtlich oder sinngemäß entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen	3
1.1	Notation	3
1.2	Funktionsräume	4
1.3	Arten von Wachstum und Abfall	5
1.4	Distributionen	10
1.5	Fourier Transformation	12
1.6	Sobolev Räume	19
1.7	Matrixoperatoren	24
1.8	Sparsity	27
2	Pseudo-Differentialoperatoren	29
2.1	Die Symbolklassen S^m	29
2.2	Oszillatorische Integrale	31
2.3	Asymptotische Entwicklung	37
2.4	Operationen auf Symbolen	40
2.5	Pseudo-Differentialoperatoren (Ψ DO)	44
3	Mikrolokale Analysis	54
3.1	Singular Support	54
3.2	Wave Front Set	56
3.3	Eigenschaften der Wave Front Set	60
3.4	Die Wave Front Set von FIO	64
3.5	Wirkung von Ψ DO	68
4	Die stetige Curvelet-Transformation	77
4.1	Definition der Curvelets	77
4.2	Lokalisierung	80
4.3	Reproduktionsformel	87
4.4	Analyse einfacher Singularitäten	91
4.5	Curvelets und Mikrolokale Analysis	97
4.6	Echte parabolische Skalierung	104
5	Die diskrete Curvelet-Transformation	106
5.1	Diskretisierung	106
5.2	Die semi-diskrete Transformation	107
5.3	Tight Frame	109
5.4	Vergleich von Frames	112
5.5	Sparsity der Gram Matrizen	117

Kapitel 1

Grundlagen

In diesem einleitenden Kapitel fixieren wir den Großteil der Notation, die wir in dieser Arbeit verwenden werden und wiederholen grundlegende Aussagen aus der Analysis und der Numerik.

Der Großteil der Beweise stammt aus [StRaym], der Beweis des Satzes von Paley-Wiener-Schwarz folgt [Hörm3]. Die Matrixnormen wurden gemäß [CanDo2] definiert, die Resultate des Abschnittes über Matrixoperatoren stammen zum Teil aus [L].

1.1 Notation

In dieser Arbeit behandeln wir vorwiegend komplex-wertige Funktionen auf dem \mathbb{R}^n . Dabei bezeichnen wir mit $\langle x, y \rangle$ das Skalarprodukt zweier Elemente $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j,$$

mit $|x|$ die euklidische Norm des \mathbb{R}^n

$$|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

und mit $B_R(x)$ die offene Kugel mit Radius R und Mittelpunkt x ,

$$B_R(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < R\}.$$

Die Menge aller Umgebungen eines Punktes x bezeichnen wir mit $\mathcal{U}(x)$. Und für eine Menge A bezeichnet $1_A(x)$ die charakteristische Funktion.

Erfüllt eine Menge $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ die Bedingung, dass mit jedem $x \in \Gamma$ auch $\mu x \in \Gamma$ für jedes positive μ , so ist Γ einen *Kegel*. Für Mengen $\Gamma \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ sagen wir, dass Γ *kegelförmige* ist, falls Γ bezüglich der zweiten Koordinate ein Kegel ist, also falls mit jedem $(x, \xi) \in \Gamma$ auch $(x, \mu\xi) \in \Gamma$, für $\mu > 0$. Die Menge aller kegelförmigen Umgebungen eines Punktes $(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit $\mathcal{U}_k(x_0, \xi_0)$.

Um die Ableitungen einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ in kompakter Form schreiben zu können, verwenden wir Multiindizes $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$.

Wie gewohnt ist die Länge eines Multiindex α definiert durch $|\alpha| = \sum_j \alpha_j$ und seine Faktorielle durch das Produkt $\alpha! = \prod_j (\alpha_j!)$. Wir summieren Multiindizes komponentenweise und außerdem schreiben wir $\alpha \leq \beta \in \mathbb{Z}_+^n$, falls $\alpha_j \leq \beta_j$ für alle $j = 1, \dots, n$. Gelegentlich werden auch Binomialkoeffizienten von Multiindizes auftreten. Ist $\beta \leq \alpha$, so schreiben wir

$$\binom{\alpha}{\beta} = \prod_{j=1}^n \binom{\alpha_j}{\beta_j} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!}$$

und der Binomialkoeffizient ist gleich 0, falls β nicht kleiner als α ist.

Ist $x \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, so definieren wir x^α als das Produkt

$$x^\alpha = \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j}$$

und mit $\partial_j = \partial/\partial x_j$, der partiellen Ableitung nach x_j , schreiben wir ganz analog

$$\partial^\alpha = \prod_j \partial_j^{\alpha_j} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

In Verbindung mit der Fouriertransformation erweist es sich oft als nützlicher, mit den Differentialoperatoren

$$D^\alpha = (-i\partial)^\alpha$$

zu arbeiten.

Abschließend sei noch erwähnt, dass wir mit $a \lesssim b$ meinen, dass es eine Konstante $C > 0$ gibt, sodass $a \leq Cb$ und falls $a \lesssim b$ und $b \lesssim a$, so schreiben wir $a \asymp b$.

1.2 Funktionenräume

Definition 1.1 (L^p)

Sei $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ eine meßbare Funktion. Wir schreiben

$$\|u\|_p = \left(\int |u(x)|^p \right)^{1/p} \quad \text{für } 1 \leq p < \infty \quad (1.1)$$

$$\|u\|_\infty = \inf\{U \in \mathbb{R} : |u(x)| \leq U \text{ fast überall (f.ü.)}\}. \quad (1.2)$$

für die Normen auf den Räumen L^p , wobei $1 \leq p < \infty$, beziehungsweise L^∞ .

Satz 1.2 (Hölder)

Seien $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $v \in L^q(\mathbb{R}^n)$, wobei $p, q \in [1, \infty]$ so, dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann ist

$$\|uv\|_1 \leq \|u\|_p \cdot \|v\|_q.$$

Beweis

Allgemein gilt für $a, b \geq 0, \mu \in (0, 1)$ die Young'sche Ungleichung: $a^\mu b^{1-\mu} \leq \mu a + (1-\mu)b$. Setzen wir konkret $\mu = \frac{1}{p}, a = \frac{|f(x)|^p}{\|f(x)\|_p^p}, b = \frac{|g(x)|^q}{\|g(x)\|_q^q}$, so folgt nach Integration über \mathbb{R}^n die Behauptung.

q.e.d.**Bemerkung**

Speziell folgt daraus für $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$, dass $uv \in L^1(\mathbb{R}^n)$, da $\|uv\|_1 \leq \|u\|_2 \cdot \|v\|_2 < \infty$.

Definition 1.3

Seien u, v zwei meßbare Funktionen von \mathbb{R}^n nach \mathbb{C} , sodass $u\bar{v} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Wir definieren

$$\langle u, v \rangle := \int u(x) \bar{v}(x) dx \quad (1.3)$$

Für den Raum L^2 handelt es sich dabei um ein Skalarprodukt, welches L^2 zu einem Hilbertraum macht. Es gilt

$$\langle u, u \rangle = \int |u(x)|^2 dx = \|u\|_2^2.$$

Definition 1.4 (L^1_{loc})

Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für eine Funktion u sagen wir, dass u *lokal integrierbar* ist und schreiben $u \in L^1_{\text{loc}}(X)$, wenn für jedes kompakte $K \subset X$ die Einschränkung von u auf K in L^1 ist.

Definition 1.5 (Faltung)

Sei u, v zwei meßbare Funktionen, für die die rechte Seite von (1.4) für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ endlich ist, dann definieren wir die **Faltung** von u und v durch

$$(u \star v)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y) v(y) dy. \quad (1.4)$$

Mit der Variablentransformation $z = x - y$ folgt die Symmetrie, also

$$(u \star v)(x) = \int u(x-y) v(y) dy = \int u(z) v(x-z) dz = (v \star u)(x)$$

Mit der Bemerkung zu Satz 1.2 ist die Faltung für $u, v \in L^2$ definiert.

1.3 Arten von Wachstum und Abfall

Um Wachstum im Unendlichen zu messen, ist die Norm $|x|$ geeignet, da sie die Dreiecksungleichung erfüllt, während hingegen ihr Quadrat $|x|^2$ geeignet ist, da es (auch in 0) glatt ist. Wir werden daher sowohl Potenzen von $(1+|x|)$, als auch von $(1+|x|^2)^{1/2}$ verwenden. Wie man sich leicht überzeugt, wachsen diese Terme

im Unendlichen mit der gleichen Geschwindigkeit und können daher äquivalent verwendet werden. In diesem Abschnitt werden wir diese Tatsache formalisieren und weiters eine Verbindung zur Klasse der schnell fallenden Funktionen \mathcal{S} herstellen. Vorerst aber führen wir einige Notationen ein, auf die wir in dieser Arbeit sehr häufig zurückgreifen werden.

Notation

In dieser Arbeit bezeichnet $\lambda(x)$ die Funktion

$$\lambda(x) := (1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.5)$$

Ist φ eine Funktion, so schreiben wir $\tilde{\varphi}$ bzw. $\tau_y \varphi$ für die durch

$$\tilde{\varphi}(x) := \varphi(-x) \quad \text{und} \quad \tau_y \varphi(x) := \varphi(x + y)$$

definierten Funktionen. Das folgende Lemma besagt, dass wir Potenzen von $\lambda(x)$ und $1 + |x|$ äquivalent verwenden können um Verhalten im Unendlichen zu beschreiben.

Lemma 1.6

Für jedes $N \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\lambda^N(x) \asymp (1 + |x|)^N.$$

Beweis

Wir werden zeigen, dass

$$(1 + |x|^2)^{1/2} \leq 1 + |x| \leq \sqrt{2} (1 + |x|^2)^{1/2},$$

woraus die Behauptung folgt, wenn wir die N te Potenz dieser Ungleichungen nehmen.

Die erste Abschätzung gilt, da

$$1 + |x|^2 \leq 1 + 2|x| + |x|^2 = (1 + |x|)^2.$$

Für die zweite Ungleichung ziehen wir die Wurzel aus

$$(1 + |x|)^2 \leq (1 + |x|)^2 + (1 - |x|)^2 = 2\lambda^2(x).$$

q.e.d.

In der Tat sehen wir aus dieser Aussage, dass es immer genau dann ein C_N gibt, sodass $\lambda^N(x) |\varphi(x)| \leq C_N$, wenn es auch ein C'_N gibt, sodass $(1 + |x|)^N |\varphi(x)| \leq C'_N$. Wir zeigen nun noch, dass diese Äquivalenz auch für Terme der Form $|x^\alpha \varphi(x)|$, mit $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, gilt.

Satz 1.7

Sei $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Es existiert genau dann zu jedem $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ ein C_α , sodass

$$|x^\alpha \varphi(x)| \leq C_\alpha \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.6)$$

wenn auch zu jedem $N \in \mathbb{Z}_+$ ein C_N existiert, sodass

$$|\varphi(x)| \leq C_N (1 + |x|)^{-N} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.7)$$

Beweis

Wir betrachten zuerst die Notwendigkeit von (1.6). Für $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ gilt

$$|x^\alpha| = \left| \prod_j x_j^{\alpha_j} \right| = \prod_j |x_j|^{\alpha_j} \leq \prod_j |x|^{\alpha_j} = |x|^{|\alpha|}$$

und wir erhalten daraus, mit $N = |\alpha|$,

$$|x^\alpha \varphi(x)| \leq |x|^N \leq (1 + |x|)^N |\varphi(x)| \leq C_N$$

Um nun zu zeigen, dass (1.6) auch hinreichend ist, weisen wir vorweg darauf hin, dass es nach Satz 1.6 genügt

$$(1 + |x|^2)^N |\varphi(x)| \leq C_N$$

zu zeigen. Es gilt

$$\begin{aligned} (1 + |x|^2)^N |\varphi(x)| &= \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} |x|^{2k} |\varphi(x)| \\ &= \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^k |\varphi(x)| \end{aligned}$$

Nun ist aber $\left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^k$ eine endliche Summe der Form $\sum_{i=1}^{M_k} c_i x^{\alpha_i}$, für $M_k \in \mathbb{N}$ und $\alpha_i \in \mathbb{Z}_+^n$, und somit gilt unter Verwendung der Voraussetzung

$$\left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^k |\varphi(x)| = \sum_{i=1}^{M_k} c_i |x^{\alpha_i} \varphi(x)| \leq \sum_{i=1}^{M_k} c_i C_{\alpha_i} \leq C_k.$$

Es folgt, dass

$$(1 + |x|^2)^N |\varphi(x)| \leq \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} C_k \leq C_N.$$

q.e.d.

Lemma 1.8

Die Integrale über \mathbb{R}^n

$$\int (1 + |x|)^{-N} dx \quad \text{und} \quad \int \lambda^{-N}(x) dx$$

sind konvergent, wenn $N > n$. Speziell gilt die genaue Abschätzung $\|\lambda^{-n}\|_2^2 = \int (1 + |x|^2)^{-n} \leq \pi^n$.

Beweis

Nach Lemma 1.6 genügt es die Aussage für λ zu zeigen. Für $x \in \mathbb{R}^n$ und $N \geq 0$, gilt

$$(1 + |x|^2)^{-N/2} \leq \prod_{j=1}^n (1 + x_j^2)^{-N/(2n)}$$

und die Aussage kommt aus dem eindimensionalen Fall. Es gilt $\int_{\mathbb{R}} (1+x^2)^{-1} dx = \pi$, wodurch alle Behauptungen bewiesen sind.

q.e.d.**Lemma 1.9 (Peetre's Ungleichung)**

Für jedes $s \in \mathbb{R}$ und alle $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\lambda^s(\xi) \leq 2^{|s|} \lambda^{|s|}(\xi - \eta) \lambda^s(\eta)$$

Beweis

Aus der Dreiecksungleichung folgt

$$1 + |\xi| \leq (1 + |\xi - \eta| + |\eta|) \leq (1 + |\xi - \eta|)(1 + |\eta|),$$

sodass

$$\lambda^2(\xi) \leq (1 + |\xi|)^2 \leq (1 + |\xi - \eta|)^2 (1 + |\eta|)^2.$$

Andererseits ist $(1 + |\eta|)^2 \leq (1 + |\eta|)^2 + (1 - |\eta|)^2 = 2\lambda^2(\eta)$ und verwenden wir die selbe Abschätzung auch für $(1 + |\xi - \eta|)^2$, so bekommen wir

$$\lambda^2(\xi) \leq 2^2 \lambda^2(\xi - \eta) \lambda^2(\eta).$$

Für $s \geq 0$ folgt die Behauptung indem wir diese Ungleichung zur Potenz $s/2$ nehmen. Für $s < 0$ tauschen wir die Rollen von ξ und η und bilden dann die Potenz $-s/2$. Wir erhalten

$$\lambda^{-s}(\eta) \leq 2^{-s} \lambda^{-s}(\eta - \xi) \lambda^{-s}(\xi),$$

was wir zu

$$\lambda^s(\xi) \leq 2^{-s} \lambda^{-s}(\xi - \eta) \lambda^s(\eta)$$

umformen.

q.e.d.**Definition 1.10 (\mathcal{S})**

Wir definieren die Schwartz Klasse der schnell fallenden Funktionen mittels

$$\mathcal{S} = \{\varphi \in C^\infty \mid \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| < \infty\} \quad (1.8)$$

Nach dieser Definition ist ein Funktion φ also genau dann in \mathcal{S} , wenn wir für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ ein $C_{\alpha, \beta}$ finden können, sodass

$$|x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| < C_{\alpha, \beta} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Schreiben wir $|\varphi|_0$ für das Supremum über \mathbb{R}^n (bzw. der jeweiligen Definitionsmenge von φ) einer beschränkten, stetigen Funktion φ , dann ist die implizite Topologie auf \mathcal{S} die von den Normen

$$|\varphi|_k := \max_{|\alpha+\beta| \leq k} |x^\alpha \partial^\beta \varphi|_0 \quad (1.9)$$

induzierte, wobei $k \in \mathbb{Z}_+$. Diese Normen machen \mathcal{S} zu einem Fréchet Raum.

Satz 1.11

Es gilt $\mathcal{S} \subset \bigcap_{1 \leq p \leq \infty} L^p$, wobei für jedes $\varphi \in \mathcal{S}$ und $1 \leq p \leq \infty$ gilt $\|\varphi\|_p \leq (2\pi)^n |\varphi|_{2n}$.

Beweis

Für $p = \infty$ gilt $\|\varphi\|_\infty = |\varphi|_0 < \infty$ und für $1 \leq p < \infty$ ist

$$\begin{aligned} |\varphi(x)|^p &\leq \left| \varphi(x) \prod_{j=1}^n (1+x_j^2) \right|^p \prod_{j=1}^n (1+x_j^2)^{-1} \\ &\leq (2^n |\varphi|_{2n})^p \prod_{j=1}^n (1+x_j^2)^{-1} \end{aligned}$$

Nach Integration erhalten wir aus Lemma 1.8 $\|\varphi\|_p \leq \pi^{n/p} 2^n |\varphi|_{2n}$, woraus insbesondere die Behauptung folgt.

q.e.d.

Ist $\varphi \in \mathcal{S}$, so erfüllt es insbesondere die Voraussetzungen von Satz 1.7 (setze $\beta = 0$ in der Definition von \mathcal{S}) und daher fällt ein solches φ schneller als jedes Funktion mit polynomialem Wachstum im Unendlichen. Letztere Menge bezeichnen wir mit \mathcal{P}^0 (es gilt also $\psi \in \mathcal{P}^0$, falls $|\psi| \leq C\lambda^N$).

Definition 1.12

Erfüllt eine Funktion $\psi \in C^\infty$ für jedes $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ eine Abschätzung der Art

$$|\partial^\alpha \psi(x)| \leq C_\alpha \lambda^{N_\alpha}(x),$$

so schreiben wir $\psi \in \mathcal{P}$. Dies ist gleichbedeutend mit $\partial^\alpha \psi \in \mathcal{P}^0$ für alle α .

Um asymptotisches Verhalten in Umgebungen anderer Grenzwerte als ∞ zu untersuchen eignet sich besonders die folgende Notation.

Definition 1.13

Wir schreiben

$$f(x) = \mathcal{O}(g(x)) \quad (\text{für } x \rightarrow x_0)$$

um auszudrücken, dass es eine Umgebung U von x_0 und ein $C > 0$ gibt, sodass

$$|f(x)| \leq C |g(x)| \quad \forall x \in U \setminus x_0.$$

1.4 Distributionen

Definition 1.14

Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir definieren die Menge \mathcal{D} der **Testfunktionen**, als

$$\mathcal{D}(X) := C_0^\infty(X)$$

Definition 1.15

Eine Folge $(\varphi_k)_k \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann in \mathcal{D} gegen $\varphi \in \mathcal{D}$ ($\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$), wenn

- $\exists K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt $\forall k : \text{supp } \varphi_k \subset K$
- $\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n : \partial^\alpha \varphi_k \xrightarrow{glm} \partial^\alpha \varphi$.

Definition 1.16

Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir sagen, dass $u : \mathcal{D}(X) \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi \mapsto \langle u, \varphi \rangle$ eine **Disbtribution** in X ist und schreiben $u \in \mathcal{D}'(X)$, wenn $\langle u, \cdot \rangle$ ein stetiges, lineares Funktional ist. Stetigkeit verlangen wir hier in dem Sinn, dass $\langle u, \varphi_k \rangle \rightarrow \langle u, \varphi \rangle$, falls $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$.

Wie schon zuvor erwähnt ist die Menge der Disbtributionen eine Erweiterung der Funktionen. Tatsächlich erzeugt jede Funktion f eine Distribution, da $\langle f, \varphi \rangle = \int f(x)\varphi(x)dx$ für $\varphi \in C_0^\infty$ ein stetiges und lineares Funktional ist. In diesem Sinne sagen wir auch, dass eine Distribution u eine Funktion ist, wenn es eine Funktion f gibt, sodass für alle Testfunktionen φ gilt: $\langle u, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$.

Definition 1.17

Eine Folge $(\varphi_k)_k \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann in \mathcal{S} gegen $\varphi \in \mathcal{S}$ ($\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$), wenn für jedes $N \in \mathbb{N}$

$$|\varphi_k - \varphi|_N \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty \quad (1.10)$$

Bemerkung

Der Raum \mathcal{S} kann mit einer Metrik ρ ausgestattet werden, sodass $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$ genau dann gilt, wenn $\rho(\varphi, \varphi_k) \rightarrow 0$. Konkret wird dies von

$$\rho(\varphi, \psi) = \sum_k \frac{|\varphi - \psi|_k}{k!(1 + |\varphi - \psi|_k)}$$

erfüllt.

Definition 1.18

Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir sagen, dass $u : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi \mapsto \langle u, \varphi \rangle$ eine **temperierte Disbtribution** ist und schreiben $u \in \mathcal{S}'$, wenn $\langle u, \cdot \rangle$ ein stetiges, lineares Funktional ist. Stetigkeit verlangen wir hier in dem Sinn, dass $\langle u, \varphi_k \rangle \rightarrow \langle u, \varphi \rangle$,

falls $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$.

Bevor wir noch eine dritte wichtige Klasse von Distributionen einführen können, müssen wir zuerst die Bedeutung einiger Begriffe, die aus der Analyse von Funktionen bekannt sind, auf den Raum der Distributionen ausweiten. So zum Beispiel die Einschränkung einer Distribution auf eine Teilmenge ihres Definitionsbereiches.

Definition 1.19

Sei $Y \subset X \subset \mathbb{R}^n$ und $u \in \mathcal{D}'(X)$. Die Einschränkung von u auf Y , $u|_Y$, ist definiert als

$$\langle u|_Y, \varphi \rangle = \langle u, \varphi \rangle, \quad \text{für } \varphi \in C_0^\infty(Y).$$

Natürlicherweise werden wir sagen, dass zwei Distributionen u und v identisch sind, wenn ihre Wirkung auf alle Testfunktionen die Gleiche ist, also $\langle u, \varphi \rangle = \langle v, \varphi \rangle$ für alle φ im Definitionsbereich von u und v . Dies gilt aber genau dann, wenn $\langle u - v, \varphi \rangle = 0$. Es genügt daher weitere Aussagen nur für den Fall $u = 0$ zu beweisen. Insbesondere gilt für temperierte Distributionen, $u \in \mathcal{S}'$, dass $u = 0$, falls $\langle u, \varphi \rangle = 0$ für alle $\varphi \in C_0^\infty$, da die glatten Funktionen mit kompakten Träger in \mathcal{S} dicht liegen.

Der nächste Satz besagt, dass es genügt die Einschränkung einer Distribution auf eine Überdeckung zu kennen, um sie zu bestimmen. Der Beweis beruht darauf, dass wir zu jeder Testfunktion ϕ eine Partition von ϕ aus Testfunktionen ϕ_j bestimmen können, die es uns erlaubt u als Summe der $\langle u, \phi_j \rangle = 0$ zu rekonstruieren.

Satz 1.20

Ist $u \in \mathcal{D}'(X)$ und es gibt zu jedem Punkt $x \in X$ eine Umgebung $Y \in \mathcal{U}(x)$, sodass $u|_Y = 0$, dann ist $u = 0$.

Damit können wir nun auch den Begriff des Trägers in natürlicher Weise und konsistent auf die Klasse der Distributionen erweitern.

Definition 1.21

Ist $u \in \mathcal{D}'(X)$, so definieren wir den Träger von u (**supp** u), als die Menge aller Punkte in X , die keine offene Umgebung besitzen, in der u gleich 0 ist.

Somit hat auch die Menge der Funktionen mit kompaktem Träger ihr Analogon unter den Distributionen, wir schreiben dafür $\mathcal{E}'(X)$.

Definition und Satz 1.22

Die Menge aller Distributionen in X mit kompaktem Träger, $\mathcal{E}'(X)$, ist identisch mit dem Dual Raum von $\mathcal{E}(X) := C^\infty(X)$ mit der durch die Semi-Normen

$$\varphi \mapsto \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_K |\partial^\alpha \varphi|, \quad (1.11)$$

definierten Topologie, wobei K über alle kompakten Teilmengen von X und k über \mathbb{Z}_+ läuft.

1.5 Fourier Transformation

Definition 1.23 (Fourier Transformation)

Sei $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Die Fourier Transformierte \hat{u} von u ist definiert durch

$$\hat{u}(\xi) = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} u(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (1.12)$$

Wir schreiben auch $\mathcal{F}u(\xi)$ oder $(u)^\wedge(\xi)$.

Es handelt sich bei \hat{u} um eine beschränkte, stetige Funktion, da für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ $|\hat{u}(\xi)| \leq \int |u(x)| dx = \|u\|_1$ und die Stetigkeit aus dem Satz der dominierten Konvergenz folgt. Unser Ziel in diesem Kapitel ist es zu zeigen, dass die Definition der Fourier Transformation auf Distributionen der Klasse \mathcal{S}' ausgeweitet werden kann, sowie einige ihrer grundlegenden Eigenschaften zu etablieren. Wir beginnen dazu mit einem Beispiel, das repräsentativen Charakter hat und auch in späteren Beweisen Verwendung finden wird.

Beispiel 1.24

Die Fourier Transformierte von $\varphi(x) = e^{-|x|^2/2}$ ist $\hat{\varphi}(\xi) = (2\pi)^{n/2} e^{-|\xi|^2/2}$.

Beweis

Per Definition ist

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(\xi) &= \int e^{-i\langle x, \xi \rangle - |x|^2/2} dx \\ &= \int e^{(\sum_j -ix_j \xi_j - x_j^2/2)} dx = \prod_{j=1}^n \left(\int e^{-ix_j \xi_j - x_j^2/2} dx_j \right), \end{aligned}$$

was beweist, dass es genügt die Aussage für den Fall $n = 1$ zu zeigen. Nehmen wir also $x, \xi \in \mathbb{R}$ an, so gilt $-\frac{(x+i\xi)^2}{2} = \frac{\xi^2}{2} - ix\xi - \frac{x^2}{2}$ und wir erhalten

$$\hat{\varphi}(\xi) = e^{-\xi^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+i\xi)^2/2}.$$

Dabei handelt es sich um ein Integral der analytischen Funktion $f(z) = e^{-z^2/2}$, $z \in \mathbb{C}$, entlang einer zur x -Achse parallelen Geraden in der komplexen Ebene. Um dessen Wert zu berechnen zeigen wir zuerst, dass wir das Integral in der komplexen Ebene auf eine parallele Gerade verschieben können, sprich

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+i\xi)^2/2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}. \quad (1.13)$$

Dazu verwenden wir den Cauchy Integralsatz, der besagt, dass der Wert dieses Integrals über jede geschlossene Kurve gleich Null ist. Wenden wir dies für den Weg aus Abbildung 1.1 an

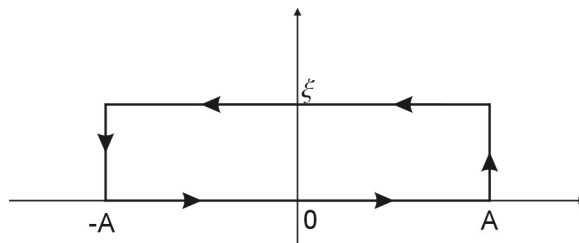


Abbildung 1.1: Geschlossener Weg zwischen x und $x + i\xi$

so bekommen wir

$$0 = \int_{-A}^A e^{-x^2/2} dx + \int_0^\xi e^{-(A+i\eta)^2/2} d\eta - \int_{-A}^A e^{-(x+i\xi)^2/2} dx - \int_0^\xi e^{-(-A+i\eta)^2/2} d\eta$$

und da $\sup_{\eta \in [0, \xi]} |e^{(\eta^2 - A^2)/2} e^{-iA\eta}| = e^{(|\xi|^2 - A^2)/2}$ gilt

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-A}^A e^{-x^2/2} dx - \int_{-A}^A e^{-(x+i\xi)^2/2} dx \right| \\ &= \left| \int_0^\xi e^{-(A+i\eta)^2/2} d\eta \right| + \left| \int_0^\xi e^{-(-A+i\eta)^2/2} d\eta \right| \leq 2|\xi| e^{(|\xi|^2 - A^2)/2}, \end{aligned}$$

woraus die Aussage von (1.13) folgt, wenn wir A gegen ∞ gehen lassen. Es bleibt nur noch die Identität $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$ zu zeigen, was wir durch einen Übergang zu Polarkoordinaten erreichen:

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \right)^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty e^{-r^2/2} r dr = 2\pi. \end{aligned}$$

q.e.d.

Satz 1.25

Für alle $\varphi \in \mathcal{S}$ und $u \in L^1$ gilt

- (i) $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}$ mit $|\hat{\varphi}|_k \leq (8\pi)^n (k+1)! |\varphi|_{2n+k}$.
- (ii) $\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$: $\widehat{D^\alpha \varphi}(\xi) = \xi^\alpha \hat{\varphi}(\xi)$ und $\widehat{x^\alpha \varphi}(\xi) = (-D)^\alpha \hat{\varphi}(\xi)$.
- (iii) (Inverse) Es gilt $\hat{\hat{\varphi}} = (2\pi)^n \tilde{\varphi}$ und somit ist

$$\check{\varphi}(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i(x,\xi)} \varphi(\xi) d\xi = (2\pi)^{-n} \tilde{\varphi} \quad (1.14)$$

die inverse Transformation zu $\hat{\cdot}$. Wir schreiben auch $\mathcal{F}^{-1}\varphi(x)$ oder $(\varphi)^\vee(x)$.

Beweis

Da der Integrand $e^{-i\langle x, \xi \rangle} \varphi(x)$ in \mathcal{S} ist, können wir unter dem Integral differenzieren, sowie partiell integrieren und diese Operationen liefern uns für $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

$$\begin{aligned} D_\xi^\alpha \hat{\varphi}(\xi) &= \int D_\xi^\alpha (e^{-i\langle x, \xi \rangle}) \varphi(x) dx = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} (-x)^\alpha \varphi(x) dx = \widehat{(-x)^\alpha \varphi}(\xi) \\ \widehat{D_x^\alpha \varphi}(\xi) &= \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} D_x^\alpha \varphi(x) dx = \int \varphi(x) (-D_x)^\alpha (e^{-i\langle x, \xi \rangle}) dx = \xi^\alpha \hat{\varphi}(\xi) \end{aligned}$$

was die Formeln in (ii) beweist. Darüber hinaus folgt aus diesen Formeln, dass

$$\xi^\alpha D_\xi^\beta \hat{\varphi}(\xi) = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} D_x^\alpha ((-x)^\beta \varphi(x)) dx$$

die Fourier Transformation einer Funktion in \mathcal{S} ist. Nach Satz 1.11 ist $\varphi \in L^1$ und daher $\hat{\varphi}$ beschränkt und stetig, mit $|\hat{\varphi}|_0 \leq \|\varphi\|_1 \leq (2\pi)^n |\varphi|_{2n}$ und dann ist

$$|\xi^\alpha D_\xi^\beta \hat{\varphi}|_0 = |\widehat{\partial_x^\alpha x^\beta \varphi}|_0 \leq (2\pi)^n |x^\beta \varphi|_{2n+|\alpha|}.$$

Um die Abschätzung aus der Behauptung zu erhalten, verwenden wir

$$\partial^\gamma (x^\alpha) = \frac{\alpha!}{(\alpha - \gamma)!} x^{\alpha - \gamma} \quad \text{und} \quad \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} \frac{\alpha!}{(\alpha - \gamma)!} \leq 2^{|\beta|} (\alpha!)$$

und schreiben

$$|\partial^\beta (x^\alpha \varphi)|_0 \leq \left| \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} \frac{\alpha!}{(\alpha - \gamma)!} x^{\alpha - \gamma} \partial^{\beta - \gamma} \varphi \right|_0 \leq 2^{|\beta|} (\alpha!) |\varphi|_{|\alpha + \beta|}.$$

Aus dieser Abschätzung folgt $|x^\alpha \varphi|_k \leq 2^k (\alpha!) |\varphi|_{k+|\alpha|}$, was uns - auf obige Ungleichung angewandt - liefert

$$|\xi^\alpha D_\xi^\beta \hat{\varphi}|_0 \leq (8\pi)^n 2^{|\alpha|} (\beta!) |x^\beta \varphi|_{2n+|\alpha+\beta|}$$

und daraus folgt die Behauptung (i), da $\max_{|\alpha+\beta| \leq k} 2^{|\alpha|} (|\beta|!) \leq (k+1)!$.

Der Beweis von $\hat{\varphi} = (2\pi)^n \tilde{\varphi}$, woraus mit der Definition $\tilde{\varphi} = (2\pi)^{-n} \check{\varphi}$ sofort folgt, dass $\check{\varphi} = \varphi$ und somit $\check{\cdot}$ die Inverse Transformation zu $\hat{\cdot}$ ist, gestaltet sich schwierig, da $e^{i\langle x+y, \xi \rangle} \varphi(y)$ als Funktion von y und ξ nicht in $L^1(\mathbb{R}^{2n})$ ist. Um absolute Konvergenz zu bekommen fügen wir einen Faktor $\psi(\xi) = e^{-|\xi|^2/2}$ ein und erhalten nach dem Satz der dominierten Konvergenz

$$\int e^{-i\langle x, \xi \rangle} \hat{\varphi}(\xi) d\xi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} \hat{\varphi}(\xi) \psi(\epsilon \xi) d\xi.$$

Substituieren wir zuerst $y = \epsilon z - x$ und danach $\xi = \zeta/\epsilon$, so erhalten wir nach dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} \hat{\varphi}(\xi) \psi(\epsilon \xi) d\xi &= \iint e^{-i\langle x+y, \xi \rangle} \varphi(y) \psi(\epsilon \xi) dy d\xi \\ &= \iint e^{-i\langle \epsilon z, \xi \rangle} \varphi(\epsilon z - x) \psi(\epsilon \xi) \epsilon^n dz d\xi \\ &= \iint e^{-i\langle z, \zeta \rangle} \varphi(\epsilon z - x) \psi(\zeta) dz d\zeta \\ &= \int \varphi(\epsilon z - x) \hat{\psi}(z) dz \end{aligned}$$

Lassen wir nun, unter Verwendung des Satzes der dominieren Konvergenz, im Integranden ϵ gegen Null gehen, folgt aus der Aussage und den Berechnungen im Beweis von Beispiel 1.24

$$\int e^{-i\langle x, \xi \rangle} \hat{\varphi}(\xi) d\xi = (2\pi)^{n/2} \varphi(-x) \int e^{-|z|^2/2} dz = (2\pi)^n \tilde{\varphi}(x).$$

q.e.d.

Bevor wir einige nun einige Operationen auf dem Raum der temperierten Distributionen einführen, wollen wir uns die auftretenden Formeln zuerst für den Fall einer Funktion u ansehen.

Ist $u \in L^1$ und $\varphi \in \mathcal{S}$, dann ist $u(x)\bar{\varphi}(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$ und wir erhalten

$$\begin{aligned} \langle \tilde{u}, \varphi \rangle &= \int u(-x) \bar{\varphi}(x) dx = \int u(z) \bar{\varphi}(-z) dz = \langle u, \tilde{\varphi} \rangle, \\ \langle \hat{u}, \varphi \rangle &= \int \left(\int e^{-i\langle x, \xi \rangle} u(x) dx \right) \bar{\varphi}(\xi) d\xi \\ &= \int u(-y) \overline{\left(\int e^{-i\langle y, \xi \rangle} \varphi(\xi) d\xi \right)} dy = \langle \tilde{u}, \hat{\varphi} \rangle, \\ \langle \check{u}, \varphi \rangle &= (2\pi)^{-n} \int \left(\int e^{i\langle x, \xi \rangle} u(\xi) d\xi \right) \bar{\varphi}(x) dx \\ &= (2\pi)^{-n} \int u(\xi) \overline{\int e^{-i\langle x, \xi \rangle} \varphi(x) dx} d\xi = (2\pi)^{-n} \langle u, \hat{\varphi} \rangle = \langle \tilde{u}, \tilde{\varphi} \rangle, \\ \langle D^\alpha u, \varphi \rangle &= \int D^\alpha u(x) \bar{\varphi}(x) dx = \int u(x) \overline{D^\alpha \varphi(x)} dx = \langle u, D^\alpha \varphi \rangle, \\ \langle \bar{u}, \varphi \rangle &= \int \bar{u}(x) \bar{\varphi}(x) dx = \int u(x) \overline{\bar{\varphi}(x)} dx = \langle u, \bar{\varphi} \rangle, \\ \langle \tau_y u, \varphi \rangle &= \int u(x+y) \bar{\varphi}(x) dx = \int u(z) \bar{\varphi}(z-y) dz = \langle u, \tau_{-y} \varphi \rangle, \end{aligned}$$

Wir werden diese Operationen nun in Anbetracht dieser Ergebnisse konsistent auf die Klasse der Distributionen erweitern. Für einen Beweis dieser Aussagen verweisen wir auf [StRaym, Theorem 1.9].

Definition und Satz 1.26

Sei $u \in \mathcal{S}'$. Für $\varphi \in \mathcal{S}$ definieren die Formeln

$$\begin{aligned} \langle \tilde{u}, \varphi \rangle &:= \langle u, \tilde{\varphi} \rangle, & \langle \hat{u}, \varphi \rangle &:= \langle \tilde{u}, \hat{\varphi} \rangle, \\ \langle \check{u}, \varphi \rangle &:= \langle \tilde{u}, \tilde{\varphi} \rangle, & \langle D^\alpha u, \varphi \rangle &:= \langle u, D^\alpha \varphi \rangle, \\ \langle \bar{u}, \varphi \rangle &:= \overline{\langle u, \bar{\varphi} \rangle}, & \langle \tau_y u, \varphi \rangle &:= \langle u, \tau_{-y} \varphi \rangle \end{aligned}$$

Distributionen $\tilde{u}, \hat{u}, \bar{u}$ und $\tau_y u \in \mathcal{S}'$. Außerdem gilt für $u, v \in L^2$

- (i) $\hat{u} \in L^2$
- (ii) $\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle = (2\pi)^n \langle u, v \rangle$ (Parsevals Formel).

Bemerkung

Speziell folgt aus Parsevals Formel, dass

$$\|\hat{u}\|_2 = (\langle \hat{u}, \hat{u} \rangle)^{1/2} = (2\pi)^{n/2} (\langle u, u \rangle)^{1/2} = (2\pi)^{n/2} \|u\|_2. \quad (1.15)$$

Satz 1.27

Sei $u \in \mathcal{S}'$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ und $y, \eta \in \mathbb{R}^n$, dann

$$\begin{aligned} \widehat{D_x^\alpha u} &= \xi^\alpha \hat{u}, & \widehat{x^\alpha u} &= (-D_\xi)^\alpha \hat{u}, \\ \widehat{\tau_y u} &= e^{-i\langle y, \xi \rangle} \hat{u}, & \widehat{e^{i\langle x, \eta \rangle} u} &= \tau_{-\eta} \hat{u}, & \hat{\hat{u}} &= \bar{\bar{u}} = \tilde{u} \end{aligned}$$

Beweis

Mit den Identitäten aus Definition 1.26 und aus Satz 1.25(ii) gilt

$$\begin{aligned} \langle \widehat{D_x^\alpha u}, \varphi \rangle &= \langle D_x^\alpha u, \tilde{\varphi} \rangle = \langle u, D_x^\alpha \hat{\varphi} \rangle = \langle u, \widehat{(-\xi)^\alpha \tilde{\varphi}} \rangle = \langle \hat{u}, (-\xi)^\alpha \tilde{\varphi} \rangle = \langle \xi^\alpha \hat{u}, \tilde{\varphi} \rangle, \\ \langle \widehat{x^\alpha u}, \varphi \rangle &= \langle (-x)^\alpha \tilde{u}, \tilde{\varphi} \rangle = \langle \tilde{u}, \widehat{(-D_\xi)^\alpha \varphi} \rangle = \langle (-D_\xi)^\alpha \hat{u}, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Verwenden wir außerdem

$$\tau_y \hat{\varphi}(x) = \int e^{-i\langle x+y, \xi \rangle} \varphi(\xi) d\xi = e^{i\langle y, \xi \rangle} \widehat{\varphi}(x)$$

und

$$e^{i\langle x, \eta \rangle} \hat{\varphi}(x) = \int e^{-i\langle x, \xi - \eta \rangle} \varphi(\xi) d\xi = \widehat{\tau_\eta \varphi}(x)$$

so erhalten wir weiter

$$\begin{aligned} \langle \widehat{\tau_y u}, \varphi \rangle &= \langle \tau_y u, \tilde{\varphi} \rangle = \langle u, \tau_{-y} \hat{\varphi} \rangle = \langle u, \widehat{e^{i\langle y, \xi \rangle} \tilde{\varphi}} \rangle = \langle \hat{u}, e^{-i\langle y, \xi \rangle} \tilde{\varphi} \rangle = \langle e^{i\langle y, \xi \rangle} \hat{u}, \tilde{\varphi} \rangle, \\ \langle \widehat{e^{i\langle x, \eta \rangle} u}, \varphi \rangle &= \langle e^{-i\langle x, \eta \rangle} \tilde{u}, \tilde{\varphi} \rangle = \langle \tilde{u}, e^{i\langle x, \eta \rangle} \tilde{\varphi} \rangle = \langle \tilde{u}, \widehat{\tau_\eta \varphi} \rangle = \langle \hat{u}, \tau_\eta \varphi \rangle = \langle \tau_{-\eta} \hat{u}, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit bekommen wir, da $\bar{\bar{\varphi}} = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} \bar{\varphi}(x) dx = \hat{\varphi}(x)$, denn dadurch ist

$$\langle \bar{\bar{u}}, \varphi \rangle = \langle u, \bar{\bar{\varphi}} \rangle = \langle u, \hat{\varphi} \rangle = \langle \hat{u}, \varphi \rangle = \langle \tilde{u}, \varphi \rangle.$$

q.e.d.

Satz 1.28

Ist u eine Distribution deren Fourier Transformierte \hat{u} eine Funktion ist, die für jedes $\mathbb{N} \in \mathbb{Z}_+$

$$|\hat{u}(\xi)| \leq C_N (1 + |\xi|)^{-N}$$

erfüllt, so ist $u \in C^\infty$.

Beweis

Per Definition sagen wir, dass eine Distribution u in C^∞ ist, falls es ein $\phi \in C^\infty$ gibt, sodass $\langle u, \varphi \rangle = \langle \phi, \varphi \rangle$ (vgl. Abschnitt 1.4). Definieren wir nun $\phi(x) = (\hat{u})(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} \hat{u}(\xi) d\xi$, so ist, unter Verwendung von Satz 1.7,

$$\begin{aligned} |\partial_x^\alpha \phi(x)| &= |(2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} (i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi) d\xi| \leq \int |\xi^\alpha \hat{u}(\xi)| d\xi \\ &\leq \int (1 + |\xi|)^{|\alpha|} |\hat{u}(\xi)| d\xi \leq C_\alpha, \end{aligned}$$

da wir in der Bedingung an \hat{u} ein $N > |\alpha| + n$ wählen können, um dann aus Satz 1.8 die Abschätzung zu erhalten. Allgemein gilt, dass eine Funktion mit beschränkter Ableitung stetig ist und daher haben wir gezeigt, dass $\phi \in C^\infty$ und $\langle u, \varphi \rangle = \langle \phi, \varphi \rangle$.

q.e.d.

Satz 1.29 (Paley-Wiener-Schwartz)

Sei $U(\xi)$ eine auf \mathbb{R}^n definierte Funktion, $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq R\}$. Dann gibt es genau dann ein $u \in C_0^\infty(B_R)$ sodass $U(\xi) = \hat{u}(\xi)$, wenn U zu einer ganzen Funktion auf \mathbb{C}^n erweitert werden kann und es zu jedem $N \in \mathbb{N}$ ein C_N gibt, sodass

$$|U(\zeta)| \leq C_N (1 + |\zeta|)^{-N} e^{R|\operatorname{Im} \zeta|} \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}^n. \quad (1.16)$$

Beweis

Sei zuerst $u \in C_0^\infty(B_R)$ so, dass $U(\xi) = \hat{u}(\xi) = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} u(x) dx$, dann können wir die rechte Seite als Funktion von $\zeta \in \mathbb{C}^n$ interpretieren und erhalten eine Erweiterung von U auf \mathbb{C}^n zu einer ganzen Funktion, da die Cauchy-Riemann Gleichungen für

$$\begin{aligned} (\operatorname{Re} U)(\zeta) &= \int \cos(\langle x, \operatorname{Re} \zeta \rangle) e^{\langle x, \operatorname{Im} \zeta \rangle} u(x) dx \\ (\operatorname{Im} U)(\zeta) &= - \int \sin(\langle x, \operatorname{Re} \zeta \rangle) e^{\langle x, \operatorname{Im} \zeta \rangle} u(x) dx \end{aligned}$$

erfüllt sind. Davon überzeugt man sich leicht, da

$$\begin{aligned} \frac{\partial \operatorname{Re} U}{\partial (\operatorname{Re} \zeta)_j}(\zeta) &= - \int \sin(\langle x, \operatorname{Re} \zeta \rangle) \cdot x_j \cdot e^{\langle x, \operatorname{Im} \zeta \rangle} u(x) dx = \frac{\partial \operatorname{Im} U}{\partial (\operatorname{Im} \zeta)_j}(\zeta) \\ \frac{\partial \operatorname{Re} U}{\partial (\operatorname{Im} \zeta)_j}(\zeta) &= \int \cos(\langle x, \operatorname{Re} \zeta \rangle) \cdot x_j \cdot e^{\langle x, \operatorname{Im} \zeta \rangle} u(x) dx = - \frac{\partial \operatorname{Im} U}{\partial (\operatorname{Re} \zeta)_j}(\zeta). \end{aligned}$$

Iteration dieses Arguments liefert das gewünschte Ergebnis.

Weiters gilt nun für die erweiterte Funktion

$$|\hat{u}(\zeta)| \leq \int |e^{-i\langle x, \zeta \rangle}| |u(x)| dx = \int e^{\langle x, \operatorname{Im} \zeta \rangle} |u(x)| dx$$

$$\leq \int e^{|x| \cdot |\operatorname{Im} \zeta|} |u(x)| dx \leq e^{R |\operatorname{Im} \zeta|} \|u\|_1.$$

Somit gilt auch für jedes α

$$|\zeta^\alpha \hat{u}(\zeta)| = |\widehat{D^\alpha u}(\zeta)| \leq e^{R |\operatorname{Im} \zeta|} \|D^\alpha u\|_1,$$

woraus (1.16) folgt.

Für die Umkehrung sei U eine ganze Funktion, die (1.16) für jedes N erfüllt. Die Einschränkung von U auf \mathbb{R}^n ist dann die Fourier Transformierte der C^∞ Funktion

$$u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} U(\xi) d\xi.$$

Es bleibt also zu zeigen, dass $\operatorname{supp} u \subset B_R$. Dafür halten wir zunächst fest, dass für jede Wahl von $\eta \in \mathbb{R}^n$

$$u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi + i\eta \rangle} U(\xi + i\eta) d\xi, \quad (1.17)$$

da uns der Cauchy Integralsatz erlaubt, die Integration in Richtung η auf eine parallele komplexe Ebene zu verschieben. (vgl. den Beweis von Beispiel 1.24 und Abbildung 1.1). Schätzen wir nun in (1.17) U unter Anwendung der Voraussetzung (1.16) mit $N = n + 1$ ab, so folgt

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq C_{n+1} \int e^{-\langle x, \eta \rangle} (1 + |\xi|)^{-n-1} e^{R|\eta|} d\xi \\ &= e^{R|\eta| - \langle x, \eta \rangle} C_{n+1} \int (1 + |\xi|)^{-n-1} d\xi. \end{aligned}$$

Ist nun $|x| > R$, so setzen wir $\eta = tx$ ($t > 0$) und erhalten $R|\eta| - \langle x, \eta \rangle = t|x|(R - |x|) < 0$, wodurch

$$|u(x)| \leq C \cdot e^{t|x|(R-|x|)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

q.e.d.

Definition 1.30

$u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ heißt **homogen vom Grad a** , falls

$$u(tx) = t^a u(x) \quad \forall t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n.$$

Satz 1.31

Ist $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ homogen vom Grad a , so ist \hat{u} homogen vom Grad $-a - n$.

Beweis

Mit der Variablentransformation $z = tx, dz = t^n dx$ gilt

$$\begin{aligned} \hat{u}(t\xi) &= \int e^{-i\langle x, t\xi \rangle} u(x) dx = \int e^{-i\langle z, \xi \rangle} u\left(\frac{z}{t}\right) \frac{dz}{t^n} \\ &= \int e^{-i\langle z, \xi \rangle} \frac{1}{t^a} u(z) \frac{dz}{t^n} = t^{-a-n} \hat{u}(\xi). \end{aligned}$$

q.e.d.

1.6 Sobolev Räume

Definition 1.32 (H^s -Räume)

Sei $s \in \mathbb{R}$, dann schreiben wir

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}' : \lambda^s \hat{u} \in L^2\}. \quad (1.18)$$

In H^s definieren wir die Norm

$$\|u\|_{(s)}^2 = (2\pi)^{-n} \int (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi, \quad (1.19)$$

oder kürzer $\|u\|_{(s)} = (2\pi)^{-n/2} \|\lambda^s \hat{u}\|_2$ in unserer bisherigen Notation, wobei der Faktor $(2\pi)^{-n}$ in (1.19) eingefügt wird um folgende Gleichheit zu erlangen:

$$\|u\|_{(0)}^2 = (2\pi)^{-n} \|\hat{u}\|_2^2 = \|u\|_2^2$$

unter Verwendung der Parseval'schen Formel (Satz 1.26(iii)). Wir werden daher ab sofort diese beiden Notationen der L^2 -Norm parallel und äquivalent verwenden.

Da $\lambda^s \leq \lambda^t$, falls $s \leq t$, gilt dann auch $\|u\|_{(s)} \leq \|u\|_{(t)}$ und daher $H^t \subset H^s$. Schreiben wir in Anbetracht dessen $H^{-\infty} = \bigcup_{s \in \mathbb{R}} H^s$ und $H^\infty = \bigcap_{s \in \mathbb{R}} H^s$, so ist

$$\mathcal{S} \subset H^{-\infty} \subset H^\infty \subset \mathcal{S}'.$$

Ist $s \in \mathbb{Z}_+$, so ist auch eine äquivalente Beschreibung von H^s ohne Verwendung der Fourier Transformation ist möglich.

Satz 1.33

Für jedes fixe $s \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ gilt $u \in H^s$ genau dann, wenn für alle $|\alpha| \leq s$ gilt $D^\alpha u \in L^2$.

Beweis

$$\begin{aligned} \lambda^{2s}(\xi) &= (1 + |\xi|^2)^s = \sum_{k \leq s} \binom{s}{k} (|\xi|^2)^k = \sum_{k \leq s} \binom{s}{k} \left(\sum_{j=1}^n \xi_j^2 \right)^k \\ &= \sum_{k \leq s} \binom{s}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \xi^{2\alpha} = \sum_{|\alpha| \leq s} \binom{s}{|\alpha|} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \xi^{2\alpha}. \end{aligned}$$

Setzen wir nun $c_\alpha = \binom{s}{|\alpha|} \frac{|\alpha|!}{\alpha!}$, so folgt

$$\begin{aligned} \|u\|_{(s)}^2 &= (2\pi)^{-n} \int \lambda^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \sum_{|\alpha| \leq s} (2\pi)^{-n} c_\alpha \int |\xi^\alpha \hat{u}(\xi)|^2 d\xi = \sum_{|\alpha| \leq s} (2\pi)^{-n} c_\alpha \int |\widehat{D^\alpha u}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \sum_{|\alpha| \leq s} c_\alpha \|D^\alpha u\|_2^2, \end{aligned}$$

also ist $\|u\|_{(s)} < \infty$ genau dann, wenn für alle $|\alpha| < s$ gilt, dass $\|D^\alpha u\|_2 < \infty$.

q.e.d.

Lemma 1.34

Für alle $s \in \mathbb{R}$ gilt, dass u genau dann in H^{s+1} ist, wenn $u, D_1 u, \dots, D_n u \in H^s$ sind, mit der Gleichheit

$$\|u\|_{(s+1)}^2 = \|u\|_{(s)}^2 + \sum_j \|D_j u\|_{(s)}^2.$$

Beweis

Da $\lambda^2(\xi) = 1 + \sum_j \xi_j^2$, gilt für jede Funktion \hat{u}

$$|\lambda^{s+1} \hat{u}|^2 = \lambda^2 |\lambda^s \hat{u}|^2 = |\lambda^s \hat{u}|^2 + \sum_j |\lambda^s \xi_j \hat{u}|^2 = |\lambda^s \hat{u}|^2 + \sum_j |\lambda^s \widehat{D^\alpha u}|^2,$$

woraus die Gleichheit der Normen und weiters die behauptete Äquivalenz folgt.

q.e.d.

Bemerkung

Insbesondere folgt daraus, dass für alle $|\alpha| = 1$ gilt $D^\alpha : u \mapsto D^\alpha u$ ist eine Abbildung von H^{s+1} nach H^s und

$$\|D^\alpha u\|_{(s)}^2 \leq \sum_{|\alpha| \leq 1} \|D^\alpha u\|_{(s)}^2 = \|u\|_{(s+1)}^2,$$

wodurch D^α ein linearer und beschränkter, also auch ein stetiger, Operator ist. Dieses Argument lässt sich induktiv weiterführen und damit ist für alle $|\alpha| \leq m$ bewiesen, dass $D^\alpha : H^s \rightarrow H^{s-|\alpha|}$ gilt.

Lemma 1.35

Ist $s > (n/2) + k$ und $u \in H^s$, so gilt für alle $|\alpha| \leq k$, dass $D^\alpha u$ eine beschränkte, stetige Funktion ist. Konkret gilt $|u|_0 \leq 2^{-n/2} \|u\|_{(n)}$ für $u \in H^n$.

Beweis

Wir werden die Behauptung durch Induktion zeigen. Ist $k = 0$ und $s > n/2$, so ist $\lambda^{-s} \in L^2$ (vgl. Lemma 1.8), sodass mit $u \in H^s$ folgt $\hat{u} = (\lambda^{-s})(\lambda^s \hat{u}) \in L^1$ als Produkt von zwei Funktionen in L^2 und daher ist $u \in C^0 \cap L^\infty$. Die Abschätzung für den Fall $s = n$ folgt aus der Cauchy-Schwarz Ungleichung,

$$|u|_0 \leq (2\pi)^{-n} \|\hat{u}\|_1 \leq (2\pi)^{-n/2} \|\lambda^{-n}\|_2 (2\pi)^{-n/2} \|\lambda^n \hat{u}\|_{(0)} \leq (2\pi)^{-n/2} \|u\|_{(n)},$$

da $\|\lambda^{-n}\|_2 \leq \pi^{n/2}$, wie wir in Lemma 1.8 gezeigt haben.

Der Induktionsschritt folgt unmittelbar aus Lemma 1.34.

q.e.d.

Proposition 1.36

Sei $u \in H^s$ und $\varphi \in \mathcal{S}$, dann ist $|\langle u, \varphi \rangle| \leq \|u\|_{(s)} \|\varphi\|_{(-s)}$. Erfüllt andererseits $u \in \mathcal{S}'$ die Ungleichung $|\langle u, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_{(-s)}$ für ein C und alle $\varphi \in \mathcal{S}$, dann ist $u \in H^s$ mit $\|u\|_{(s)} \leq C$.

Beweis

Die erste Behauptung ist eine Folge von Parseval's Formel und der Cauchy-Schwarz Ungleichung. Es gilt

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leq (2\pi)^{-n} |\langle \hat{u}, \hat{\varphi} \rangle| = (2\pi)^{-n} |\langle \lambda^s \hat{u}, \lambda^{-s} \hat{\varphi} \rangle| = \|u\|_{(s)} \|\varphi\|_{(-s)}.$$

Gilt andererseits $|\langle u, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_{(-s)}$ für alle $\varphi \in \mathcal{S}$, dann ist

$$\begin{aligned} |\langle \lambda^s \hat{u}, \varphi \rangle| &= |\langle \hat{u}, \lambda^s \varphi \rangle| = |\langle \hat{u}, \widehat{\lambda^s \varphi} \rangle| \\ &\leq C \|\widehat{\lambda^s \varphi}\|_{(-s)} = C (2\pi)^{-n/2} \|\lambda^{-s} \widehat{\lambda^s \varphi}\|_{(0)} \\ &= C (2\pi)^{n/2} \|\varphi\|_2. \end{aligned}$$

Daher ist $\langle \lambda^s \hat{u}, \cdot \rangle$ ein stetiges, lineares Funktional und erfüllt somit die Voraussetzungen des Riesz'schen Darstellungssatzes. Die Eindeutigkeit ist weiterhin gegeben, da ein Funktional, das auf \mathcal{S} identisch verschwindet, fast überall gleich 0 ist. Wir erhalten, dass $\lambda^s \hat{u} \in L^2$ mit $\|\lambda^s \hat{u}\|_2 \leq C (2\pi)^{n/2}$ und das heißt $u \in H^s$ mit $\|u\|_{(s)} \leq C$.

q.e.d.

Lemma 1.37

Für jedes $u \in \mathcal{S}'$ existiert ein $N \in \mathbb{Z}_+$, sodass $\psi u \in H^{-N}$, falls $\psi \in \mathcal{S}$ oder $\psi(x) = \lambda^{-2N}(x)$.

Beweis

Da jede temperierte Distribution ein stetiges, lineares Funktional ist, gilt für geeignetes $C > 0$, $k \in \mathbb{N}$ und alle $\varphi \in \mathcal{S}$, dass $|\langle u, \varphi \rangle| \leq C |\varphi|_k$. Wir können dann schreiben

$$|\langle \psi u, \varphi \rangle| = |\langle u, \bar{\psi} \varphi \rangle| \leq C |\bar{\psi} \varphi|_k \leq C 2^k |\bar{\psi}|_k \max_{|\beta| \leq k} |\partial^\beta \varphi|_0$$

unter Verwendung der Leibnizschen Formel. Nun ist $|\bar{\psi}|_k$ endlich für alle $\psi \in \mathcal{S}$ und genauso falls $\psi(x) = (1 + |x|^2)^{-N}$ mit $N \geq k/2$.

Lemma 1.38

Es gilt

$$\widehat{uv}(\xi) = (2\pi)^{-n} (\hat{u} \star \hat{v})(\xi) = (2\pi)^{-n} \int \hat{u}(\xi - \eta) \hat{v}(\eta) d\eta \quad (1.20)$$

für alle $u, v \in L^2$, sowie für alle $u \in H^\infty$ und $v \in H^{-\infty}$.

Außerdem gilt Leibniz' Formel

$$D^\alpha(uv) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (D^\beta u) (D^{\alpha-\beta} v)$$

für alle $u, v \in H^{|\alpha|}$

Beweis

Da $u, v \in L^2 \implies uv \in L^1$ (vgl. Satz 1.2), erhalten wir

$$\widehat{uv}(\xi) = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} u(x) v(x) dx = \langle u_\xi, \bar{v} \rangle$$

wobei $u_\xi(x) = e^{-i\langle x, \xi \rangle} u(x)$. Unter Verwendung von Parsevals Formel (vgl. Satz 1.26) und den Formeln aus Satz 1.27 erhalten wir

$$\widehat{uv}(\xi) = (2\pi)^{-n} \langle \widehat{u_\xi}, \widehat{\bar{v}} \rangle = (2\pi)^{-n} \langle \widehat{\tau_\xi u}, \widehat{\bar{v}} \rangle = (2\pi)^{-n} \int \hat{u}(\xi - \eta) \hat{v}(\eta) d\eta \quad (1.21)$$

wie behauptet. Ist $u \in H^\infty, v \in H^{-\infty}$ und $\varphi \in \mathcal{S}$, so ist $\psi := \bar{\varphi} \in \mathcal{S} \subset L^2$ und wir können (1.21) auf $\bar{u}\psi$ anwenden um folgende Identität zu erhalten,

$$\begin{aligned} \langle \widehat{uv}, \varphi \rangle &= \langle \widehat{uv}, \hat{\psi} \rangle = (2\pi)^n \langle uv, \psi \rangle = (2\pi)^n \langle v, \bar{u}\psi \rangle = (2\pi)^n \langle \hat{v}, \widehat{\bar{u}\psi} \rangle \\ &= (2\pi)^{-n} \iint \hat{v}(\eta) \hat{u}(\xi - \eta) \bar{\hat{\psi}}(\xi) d\xi d\eta \\ &= \int \left((2\pi)^{-n} \int \hat{u}(\xi - \eta) \hat{v}(\eta) d\eta \right) \bar{\varphi}(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

was uns wieder die gleiche Formel für $\widehat{uv}(\xi)$ liefert. Um Leibniz' Formel zu beweisen, werden wir verwenden, dass

$$\xi^\alpha = ((\xi - \eta) + \eta)^\alpha = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\xi - \eta)^\beta \eta^{\alpha - \beta}$$

für jedes $\eta \in \mathbb{R}^n$ und zeigen damit, dass

$$\begin{aligned} \widehat{D_x^\alpha (uv)}(\xi) &= \xi^\alpha \widehat{uv}(\xi) = (2\pi)^{-n} \int \xi^\alpha \hat{u}(\xi - \eta) \hat{v}(\eta) d\eta \\ &= (2\pi)^{-n} \int \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\xi - \eta)^\beta \hat{u}(\xi - \eta) \eta^{\alpha - \beta} \hat{v}(\eta) d\eta \\ &= \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (2\pi)^{-n} \int \widehat{D_x^\beta u}(\xi - \eta) \cdot \widehat{D_x^{\alpha - \beta} v}(\eta) d\eta \\ &\stackrel{(1.21)}{=} \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (D_x^\beta u D_x^{\alpha - \beta} v)^\wedge(\xi) \\ &= \left(\sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D_x^\beta u D_x^{\alpha - \beta} v \right)^\wedge(\xi). \end{aligned}$$

Wenden wir nun auf den Anfang und das Ende dieser Gleichungskette die inverse Fouriertransformation an, so erhalten wir die behauptete Identität.

q.e.d.

Korollar 1.39

Unter den Voraussetzungen von Satz 1.38, gilt auch

$$\widehat{u \star v}(\xi) = \hat{u}(\xi) \cdot \hat{v}(\xi). \quad (1.22)$$

Beweis

Wir wenden (1.20) auf \check{u} und \check{v} an und verwenden die Formeln $\hat{u} = (2\pi)^n \check{u}$ und $\check{u} = (2\pi)^{-n} \hat{u}$ (vgl. Satz 1.25) um

$$\widehat{u \star v} = (2\pi)^n \widehat{\check{u} \check{v}} = (2\pi)^{2n} \widetilde{\check{u} \check{v}} = \hat{u} \hat{v}$$

zu erhalten.

q.e.d.

Satz 1.40

Sei $\varphi \in H^\infty$ und $s \in \mathbb{R}$. Dann gilt $u \in H^s \implies \varphi u \in H^s$ und

$$\|\varphi u\|_{(s)} \leq 2^{|s|-(n/2)} \|\varphi\|_{(|s|+n)} \|u\|_{(s)}.$$

Ist außerdem $a(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$ eine linearer, partieller Differentialoperator der Ordnung m mit Koeffizienten $a_\alpha \in H^\infty$, dann ist $a(x, D)$ eine stetige Abbildung von H^s nach H^{s-m} für jedes $s \in \mathbb{R}$.

Beweis

Aus Lemma 1.9 erhalten wir, dass $\lambda^{2s}(\xi) \leq 4^{|\xi|} \lambda^{2|\xi|}(\xi - \eta) \lambda^{2s}(\eta)$. Damit können wir - unter Anwendung der Cauchy-Schwarz Ungleichung im Integral von Lemma 1.38 - schreiben

$$\begin{aligned} |\lambda^s(\xi) \widehat{\varphi u}(\xi)|^2 &= |(2\pi)^{-n} \int \lambda^s(\xi) \hat{\varphi}(\xi - \eta) \hat{u}(\eta) d\eta|^2 \\ &= (2\pi)^{-n} |\langle \lambda^{|\xi|+n}(\xi - \cdot) \hat{\varphi}(\xi - \cdot), \lambda^{-|\xi|-n}(\xi - \cdot) \lambda^s(\xi) \hat{u}(\cdot) \rangle|^2 \\ &\leq \|\varphi\|_{(|s|+n)}^2 \int \lambda^{-2|\xi|-2n}(\xi - \eta) \lambda^{2s}(\xi) |\hat{u}(\eta)|^2 d\eta \\ &\leq \|\varphi\|_{(|s|+n)}^2 \int 4^{|\xi|} \lambda^{-2n}(\xi - \eta) \lambda^{2s}(\eta) |\hat{u}(\eta)|^2 d\eta. \end{aligned}$$

Integrieren wir nun auf beiden Seiten nach ξ und verwenden $\int \lambda^{-2n}(\xi - \eta) d\xi \leq \pi^n$ (vgl. Lemma 1.8), so folgt

$$\begin{aligned} \|\varphi u\|_{(s)}^2 &= (2\pi)^{-n} \int |\lambda^s(\xi) \widehat{\varphi u}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \|\varphi\|_{(|s|+n)}^2 (2\pi)^{-n} \int 2^{2|\xi|} \int \lambda^{-2n}(\xi - \eta) d\xi \lambda^{2s}(\eta) |\hat{u}(\eta)|^2 d\eta \\ &\leq \|\varphi\|_{(|s|+n)}^2 2^{2|s|-n} \|u\|_{(s)}^2, \end{aligned}$$

woraus der erste Teil der Behauptung folgt.

Aus Lemma 1.34 erhalten wir, dass D^α für alle $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $s \in \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung von H^s nach $H^{s-|\alpha|}$ ist. Da $a_\alpha \in H^\infty$ folgt aus dem ersten Teil des Lemmas, dass $\forall |\alpha| \leq m : a_\alpha(x)D^\alpha u \in H^{s-m}$. Somit gilt dies klarerweise auch für die Summe all dieser Terme.

q.e.d.

1.7 Matrixoperatoren

In diesem Abschnitt behandeln wir lineare Operatoren $A : \ell^1(\mathbb{C}) \rightarrow \ell^1(\mathbb{C})$. Jeder solche Operator A hat eine eindeutige Matrixdarstellung $(a_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$, wobei gilt $a_{ij} \in \mathbb{C}$ und $A(x) = (\sum_j a_{ij}x_j)_i$. Wir unterscheiden daher ab sofort nicht mehr zwischen dem Operator A und der entsprechenden Matrix $(a_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$, also ist $A(x) = A \cdot x$.

Operatoren dieser Art werden wir im letzten Kapitel dieser Arbeit, nach der Diskretisierung Curvelet Transformation, begegnen. Die Auswahl der angeführten Sätze und die verwendete Notation richtet sich speziell nach den Anforderungen in Abschnitt 5.5.

Definition 1.41

Für $0 < p \leq 1$ definieren wir die p -Quasinorm von A als die maximale ℓ^p Norm aller Zeilen und Spalten von A :

$$\|A\|_p := \max \left(\sup_i \left(\sum_j |a_{ij}|^p \right)^{1/p}, \sup_j \left(\sum_i |a_{ij}|^p \right)^{1/p} \right). \quad (1.23)$$

In Verbindung mit Matrixoperatoren bezeichnen wir außerdem mit $\|\cdot\|_{(q)}$, $1 \leq q \leq \infty$, die allgemein verwendeten Matrixnormen, also

$$\|A\|_{(q)} := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_q}{\|x\|_q}. \quad (1.24)$$

Proposition 1.42

Sind A und B Matrixoperatoren, so gilt für alle $0 < p \leq 1$ die p -Dreiecksungleichung

$$\|A + B\|_p^p \leq \|A\|_p^p + \|B\|_p^p, \quad (1.25)$$

sowie

$$\|AB\|_p \leq \|A\|_p \|B\|_p \quad (1.26)$$

und für alle $1 \leq q \leq \infty$

$$\|A\|_{(q)} \leq \|A\|_p. \quad (1.27)$$

Beweis

Da die Funktionen $\varphi(r) = r^p$ für $0 < p \leq 1$ auf der positiven reellen Achse subadditiv sind, ist

$$\|x + y\|_p^p \leq \sum_j (|x_j| + |y_j|)^p \leq \sum_j |x_j|^p + |y_j|^p \leq \|x\|_p^p + \|y\|_p^p.$$

Daher ist auch $\|(a_{ij})_j + (b_{ij})_j\|_p^p \leq \|(a_{ij})_j\|_p^p + \|(b_{ij})_j\|_p^p$ und die entsprechende Aussage gilt für die Spaltensummen, woraus die p-Dreiecksungleichung folgt.

Ist $A = (a_{ij})_{i,j}$ und $B = (b_{ij})_{i,j}$, so ist AB gegeben durch $AB = (\sum_k a_{ik}b_{kj})_{i,j}$ und wir haben

$$\|AB\|_p = \max \left(\sup_i \left(\sum_j \left| \sum_k a_{ik}b_{kj} \right|^p \right)^{1/p}, \sup_j \left(\sum_i \left| \sum_k a_{ik}b_{kj} \right|^p \right)^{1/p} \right).$$

Weiters gilt

$$\begin{aligned} \sum_j \left| \sum_k a_{ik}b_{kj} \right|^p &\leq \sum_j \sum_k |a_{ik}|^p |b_{kj}|^p \leq \sum_k |a_{ik}|^p \sum_j |b_{kj}|^p \\ &= \sum_k |a_{ik}|^p \|(b_{kj})_j\|_p^p \leq \sup_k \|(b_{kj})_j\|_p^p \|(a_{ij})_j\|_p^p. \end{aligned}$$

und daraus folgt

$$\sup_i \left(\sum_j \left| \sum_k a_{ik}b_{kj} \right|^p \right)^{1/p} \leq \sup_i \|(a_{ij})_j\|_p \sup_k \|(b_{kj})_j\|_p.$$

Ebenso erhalten wir

$$\sup_j \left(\sum_i \left| \sum_k a_{ik}b_{kj} \right|^p \right)^{1/p} \leq \sup_k \|(a_{ik})_i\|_p \sup_j \|(b_{ij})_i\|_p.$$

Daher ist

$$\begin{aligned} \|AB\|_p &\leq \max \left(\sup_i \|(a_{ij})_j\|_p \sup_k \|(b_{kj})_j\|_p, \sup_k \|(a_{ik})_i\|_p \sup_j \|(b_{ij})_i\|_p \right) \\ &\leq \max \left(\sup_i \|(a_{ij})_j\|_p, \sup_k \|(a_{ik})_i\|_p \right) \cdot \max \left(\sup_k \|(b_{kj})_j\|_p, \sup_j \|(b_{ij})_i\|_p \right) \\ &= \|A\|_p \|B\|_p, \end{aligned}$$

was die Aussage von (1.26) ist.

Nach dem Interpolationssatz von Riesz-Thorin wissen wir, dass $\|A\|_{(q)} \leq \max(\|A\|_{(1)}, \|A\|_{(\infty)})$, wobei $1 \leq q \leq \infty$. Weiters gilt

$$\begin{aligned} \|Ax\|_1 &\leq \sum_i \sum_j |a_{ij}| |x_j| \leq \sum_j |x_j| \sum_i |a_{ij}| \leq \sup_j \sum_i |a_{ij}| \sum_j |x_j| \\ &\leq \sup_j \sum_i |a_{ij}| \|x\|_1, \end{aligned}$$

sowie

$$\|Ax\|_\infty \leq \sup_i \sum_j |a_{ij}| |x_j| \leq \sup_i \sum_j |a_{ij}| (\sup_j |x_j|) \leq \sup_i \sum_j |a_{ij}| \|x\|_\infty,$$

woraus folgt

$$\|A\|_{(q)} \leq \max \left(\sup_j \sum_i |a_{ij}|, \sup_i \sum_j |a_{ij}| \right).$$

Es bleibt also zu zeigen, dass $\|(a_{ij})_i\|_1 \leq \|(a_{ij})_i\|_p$ und $\|(a_{ij})_j\|_1 \leq \|(a_{ij})_j\|_p$. Sei $x \in \ell^1$, so ist für alle j der Quotient $y_j := |x_j|/\|x\|_1$ kleiner gleich 1 und somit gilt $y_j^p \geq y_j$ für jedes $p \leq 1$. Wir können dann schreiben

$$1 = \sum_j y_j \leq \sum_j y_j^p \leq \left(\sum_j y_j^p \right)^{1/p},$$

und einsetzen der Definition von y_j liefert, die gewünschte Beziehung

$$\|x\|_1 \leq \left(\sum_j |x_j|^p \right)^{1/p} = \|x\|_p.$$

q.e.d.

Definition und Satz 1.43

Die Matrixdarstellung des adjungierten Operators zu A ist gegeben durch dessen *hermitesch Transponierte*,

$$A^H := (\bar{a}_{ji})_{i,j \in \mathbb{N}}.$$

Jene Operatoren A , für die $A^H = A$ gilt, bezeichnen wir als *hermitesch*.

Definition 1.44

Sei A ein Matrixoperator. Wir schreiben $R(A)$ für die *Range* (den Bildbereich) von A . Formal ist diese gegeben durch

$$R(A) := \{\alpha \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \exists \beta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \alpha = A\beta\}. \quad (1.28)$$

Definition und Satz 1.45

Sei $A : \ell^1 \rightarrow \ell^1$ ein Matrixoperator, sodass

$$A^2 = A,$$

dann ist A eine **Projektion** und es gilt

$$\alpha \in R(A) \iff \alpha = A\alpha.$$

Außerdem gilt $\|A\|_{(2)} \geq 1$ für jede Projektion $A \neq 0$.

Beweis

Ist $\alpha = A\alpha$, so gilt offensichtlich $\alpha \in R(A)$, da die definierende Bedingung für $\beta = \alpha$ erfüllt ist.

Ist umgekehrt $\alpha \in R(A)$, dann wählen wir β sodass $\alpha = A\beta$ und erhalten

$$A\alpha = A^2\beta = A\beta = \alpha.$$

Für die Aussage über die Norm einer Projektion, betrachten wir $\alpha \in R(A) \setminus \{0\} \neq \emptyset$ und mit

$$\|\alpha\|_2 = \|A\alpha\|_2 \leq \|A\|_{(2)} \|\alpha\|_2,$$

erhalten wir $\|A\|_{(2)} \geq 1$.

q.e.d.

Definition und Satz 1.46

Ist A ein Matrixoperator, so heißt der Operator

$$\sum_{m=0}^{\infty} A^m$$

die *Neumann Reihe* von A . Konvergiert diese Reihe in einer der Normen $\|\cdot\|_{(q)}$, so ist der Operator $Id - A$ invertierbar und es gilt

$$(Id - A)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} A^m.$$

Insbesondere ist diese Voraussetzung erfüllt, falls $\|A\|_{(q)} < 1$.

Beweis

Ist die Konvergenz sichergestellt, so folgt $(Id - A) \sum_{m \geq 0} A^m = \sum_{m \geq 0} A^m - \sum_{m \geq 1} A^m = Id$. Für den Fall $\|A\|_{(q)} < 1$ erhalten wir die Konvergenz aus dem Banachschen Fixpunktsatz.

q.e.d.

1.8 Sparsity

Grob gesprochen sagen wir, dass eine Matrix beziehungsweise ein Vektor *sparse* (zu Deutsch "dünnbesetzt") sind, wenn deren Einträge vorwiegend aus Nullen bestehen. Besonders in der Numerischen Mathematik treten solche Objekte häufig auf, etwa als Folge von Diskretisierungen. Da der Begriff allerdings nicht immer quantitativ verwendet wird (was genau heißt "vorwiegend aus Nullen"), gestaltet sich eine exakte Charakterisierung schwierig. Eine regelmäßige Form von Dünnbesetztheit liegt im Falle von Bandmatrizen vor:

Definition 1.47

Ein Matrixoperator A hat endliche Bandbreite, falls $k \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $a_{ij} = 0$ immer wenn $|i - j| > k$ und ein solches A heißt *Bandmatrix*.

In der Praxis treten aber noch andere Arten von unregelmäßiger Dünnbesetztheit auf, die mit dieser Definition nicht (gut) charakterisierbar sind: Erstens jene Matrizen, bei denen die Einträge ungleich Null nicht nur in der Nähe der Diagonale auftreten. Sind dies nur Wenige - also insbesondere endlich viele - hat die Matrix zwar auch endliche Bandbreite, diese ist unter Umständen aber nicht mehr sehr aussagekräftig. Und zweitens Matrizen, die zwar voll besetzt sind, wo aber die Einträge von der Hauptdiagonale weg stark abfallen (das heißt die Einträge fallen als Funktion von $|i - j|$). Die folgende Definition lässt auch diese Arten von Dünnbesetztheit zu.

Definition 1.48

Ein Matrixoperator A heißt *sparse*, falls $\|A\|_p < \infty$ für alle $0 < p \leq 1$.

Dass diese Definition tatsächlich die gewünschte Charakterisierung liefert, motiviert der folgende Satz.

Satz 1.49

Ist für einen Vektor $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, die Menge

$$P_x := \{j \in \mathbb{N} : |x_j| > 0\}. \quad (1.29)$$

endlich, so gilt $\|x\|_p < \infty$ für alle $0 < p \leq 1$. Hat P_x mehr als ein Element, so gilt $\lim_{p \rightarrow 0} \|x\|_p = \infty$.

Beweis

Definieren wir $M := \max_{j \in P_x} |x_j|$ und $K := |P_x| < \infty$, so gilt

$$\|x\|_p^p \leq \sum_{j \in P_x} |x_j|^p \leq K M^p < \infty,$$

woraus folgt, dass die alle p -Normen endlich sind. Umgekehrt gilt jedoch, falls $K > 1$, mit $m := \min_{j \in P_x} |x_j|$,

$$\|x\|_p \geq K^{1/p} m \rightarrow \infty \quad \text{für } p \rightarrow 0.$$

q.e.d.

Bemerkung

Die Umkehrung dieser Aussage ist nicht richtig. Für den Vektor $x = (e^{-j})_j$ gilt zum Beispiel für jedes $p > 0$

$$\|x\|_p^p = \sum_{j=1}^{\infty} (e^{-j})^p = \frac{1}{e^p - 1} < \infty,$$

obwohl der Vektor voll besetzt ist.

Kapitel 2

Pseudo-Differentialoperatoren

Die Theorie der Ψ DO ist eine Verallgemeinerung des Konzeptes der Differentialoperatoren. Das Ziel besteht darin, Inverse zu diesen Operatoren zu finden (zumindest approximativ) und somit allgemeinere Differentialgleichungen lösen zu können. Speziell gelingt dies für den Fall von elliptischen Operatoren, wie wir im letzten Abschnitt des Kapitels sehen werden. Eine zentrale Rolle in der Entwicklung dieses Konzepts spielt die Idee, Aussagen über Operatoren auf algebraische Berechnung auf deren Symbolen zurückzuführen.

Zuvor beschäftigen wir uns mit oszillatorischen Integralen, die die Grundlage der Berechnungen bilden, beweisen dann den Satz über die asymptotische Entwicklung und führen die Operationen der Konjunktion und der Komposition von Symbolen ein. Nach diesen Vorbereitungen können wir die Wirkung der Ψ DO konsistent auf die Klasse der Distributionen erweitern. Am Ende dieses Kapitels behandeln wir dann den Spezialfall von elliptischen Ψ DO und werden sehen, dass diese eine sogenannte Parametrix (approximative Inverse) besitzen.

Dieses Kapitel ist eine Verbindung der Kapitel 2 und 3 in [StRaym].

2.1 Die Symbolklassen S^m

Wir werden diesen Abschnitt mit einem ersten Beispiel eines Pseudo-Differentialoperators beginnen und sofort die Verbindung zu den im ersten Kapitel besprochenen Sobolevräumen H^s herstellen.

Definition 2.1

Wir definieren den Operator $\lambda^s(D) : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ durch

$$\lambda^s(D)u(x) = (\lambda^s \hat{u})^\vee(x). \quad (2.1)$$

Unter Verwendung von (1.15), haben wir dann

$$\|u\|_{(s)} = (2\pi)^{-n/2} \|\lambda^s \hat{u}\|_{(0)} = (2\pi)^{-n/2} \|\widehat{\lambda^s(D)u}\|_{(0)} = \|\lambda^s(D)u\|_{(0)},$$

(Diese Gleichheit gilt auch falls $u \notin H^s$, beide Seiten haben dann den Wert Unendlich). Aus der Definition folgt sofort, dass $\lambda^s(D)\lambda^t(D)u = (\lambda^s\lambda^t u)^\sim = \lambda^{s+t}(D)u$ und auch von den folgenden Eigenschaften überzeugt man sich leicht.

Proposition 2.2

Für jedes $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{S}$ und $u \in \mathcal{S}'$ ist

$$\lambda^s(D)\varphi(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} \lambda^s(\xi) \hat{\varphi}(\xi) d\xi$$

und

$$\langle \lambda^s(D)u, \varphi \rangle = \langle u, \lambda^s(D)\varphi \rangle.$$

Außerdem gilt für alle $t \in \mathbb{R}$, dass $\|u\|_{(s)} = \|\lambda^t(D)u\|_{(s-t)}$, also: $u \in H^s$ genau dann, wenn $\lambda^t(D)u \in H^{s-t}$.

Beweis

Ist $\varphi \in \mathcal{S}$, so können wir die inverse Fourier Transformation explizit hinschreiben (1.14) und erhalten daraus die Formel für $\lambda^s(D)\varphi$, da auch $\lambda^s\hat{\varphi} \in \mathcal{S}$.

Die Formel für $\lambda^s(D)u$ hingegen kommt von

$$\begin{aligned} \langle \lambda^s(D)u, \varphi \rangle &= (2\pi)^{-n} \langle \widehat{\lambda^s(D)u}, \hat{\varphi} \rangle = (2\pi)^{-n} \langle \lambda^s\hat{u}, \hat{\varphi} \rangle \\ &= (2\pi)^{-n} \langle \hat{u}, \lambda^s\hat{\varphi} \rangle = \langle u, \lambda^s(D)\varphi \rangle. \end{aligned}$$

Abschließend folgt die Gleichheit der Normen aus

$$\|u\|_{(s)} = (2\pi)^{-n/2} \|\lambda^{s-t}\lambda^t u\|_{(0)} = \|(\lambda^t\hat{u})^\sim\|_{(s-t)} = \|\lambda^t(D)u\|_{(s-t)}$$

q.e.d.

Das gleiche Prinzip werden wir nun auch verwenden um zur allgemeinen Definition von Pseudo-Differentialoperatoren zu kommen. Wie wir schon zuvor gesehen haben, ergibt sich als Eigenschaft der Fourier Transformation für $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\widehat{D^\alpha\varphi}(\xi) = \xi^\alpha \hat{\varphi}(\xi) \tag{2.2}$$

und damit ist, unter Verwendung der inversen Fourier-Transformation

$$D^\alpha\varphi(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} \xi^\alpha \hat{\varphi}(\xi) d\xi.$$

Ausgehend davon werden wir den Differentialoperator $a(x, D)$ mittels

$$a(x, D)\varphi(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} a(x, \xi) \hat{\varphi}(\xi) d\xi, \tag{2.3}$$

definieren, wobei die Funktion $a(x, \xi)$ als *Symbol* des Operators $a(x, D)$ bezeichnet wird.

Im einfachsten Fall handelt es sich bei diesen Operatoren um lineare partielle Differentialoperatoren, $a(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$. Aus (2.2) ergibt sich dann, dass deren Symbol ein Polynom ist: $a(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$. Verwendet man nun die selbe Definition für allgemeinere Klassen von Symbolen, S^m , so erhält man Pseudodifferential-Operatoren.

Definition 2.3 (S^m)

Sei $m \in \mathbb{R}$, $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. $a \in S^m : \iff$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n \exists C_{\alpha, \beta} : \lambda^{|\beta|-m}(\xi) |D_x^\alpha D_\xi^\beta a(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} \quad \forall x, \xi \in \mathbb{R}^n .$$

$a \in S^m$ heißt *Symbol der Ordnung m* . Natürlich gilt $l \leq m \implies S^l \subset S^m$ und daher schreiben wir $S^\infty = \bigcup_m S^m$ und $S^{-\infty} = \bigcap_m S^m$. Außerdem erlaubt uns diese Inklusion approximative Berechnungen in S^m modulo S^l , falls $l < m$. Insbesondere wird uns das zu einer asymptotischen Entwicklung modulo $S^{-\infty}$ führen. Zunächst betrachten wir an dieser Stelle einige Beispiele von Funktionen in S^m .

- $a(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$, mit Koeffizienten $a_\alpha \in H^\infty$ ist aus S^m .
- Sind die Koeffizienten $a_\alpha \in C^\infty$, so können wir diese - etwa um lokale Aussagen zu treffen - mit $\varphi \in C_0^\infty$ multiplizieren. Damit gilt $a_\alpha \varphi(x) \in C_0^\infty \subset H^\infty$ und wir befinden uns in einer analogen Situation zum ersten Beispiel.
- Offensichtlich gilt $\lambda^m \in S^m$.
- $C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \subset S^{-\infty}$

Die Klasse S^m kann durch folgende Äquivalenz charakterisiert werden:

$$a \in S^m \iff \lambda^{-m} a \in S^0 .$$

Da für $a \in S^m$, $b \in S^l$ gilt $ab \in S^{m+l}$, folgt insbesondere, dass S^0 unter Multiplikation abgeschlossen ist.

2.2 Oszillatorische Integrale

Um die Symbole der Klassen S^m zu adjungieren und miteinander zu verknüpfen werden wir Integrale von Funktionen definieren, die sich als Produkt eines oszillierenden Terms und einer Amplitude mit kontrolliertem Wachstum im Unendlichen zusammen setzen. Genauer gesagt, soll der oszillierende Term eine trigonometrische Funktion einer quadratischen Form sein, während die Amplituden aus den folgenden Räumen sind:

Definition 2.4

Sei $m \geq 0$. $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ ist eine **Amplitude der Ordnung m** (wir schreiben $a \in A^m$) : \iff

$$(1 + |x|^2)^{-m/2} |\partial^\alpha a(x)| \leq C_\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$$

Wir verwenden auf A^m die Normen

$$\|a\|_k = \max_{|\alpha| \leq k} |\lambda^{-m}(x) \partial^\alpha a|_0$$

Beispiel 2.5

Für jede Symbol $a \in S^m(\mathbb{R}^n)$ gilt $a \in A^{|m|}(\mathbb{R}^{2n})$.

Beweis

Die Aussage folgt, wenn wir in der Abschätzung aus der Definition von S^m künstlich eine x Abhängigkeit einführen. Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ gilt

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} \lambda^{m-|\beta|}(\xi) \leq C_{\alpha, \beta} \lambda^{|m|}(\xi) \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |\xi|^2 + |x|^2)^{|m|/2}.$$

q.e.d.

Unter der Voraussetzung, dass $a \in A^m$, können wir nun die Bedeutung eines solchen Integrals definieren:

Satz 2.6 (Oszillatorische Integrale)

Sei q eine nicht-degenerierte quadratische Form auf \mathbb{R}^n , $a \in A^m$ und $\varphi \in \mathcal{S}$ so, dass $\varphi(0) = 1$. Dann existiert der Limes

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int e^{iq(x)} a(x) \varphi(\epsilon x) dx, \quad (2.4)$$

ist unabhängig von der Wahl von φ und ist gleich $\int e^{iq(x)} a(x) dx$, falls $a \in L^1$. Ist $a \notin L^1$, so schreiben wir weiterhin $\int e^{iq(x)} a(x) dx$ für diesen Limes und erhalten eine Abschätzung

$$\left| \int e^{iq(x)} a(x) dx \right| \leq C_{q, m} \|a\|_{m+n+1}.$$

Beweis

Ist $a \in L^1$, so ist das Resultat eine Folge des Satzes der dominierten Konvergenz. Für den allgemeinen Fall wählen wir eine Funktion $\psi \in C_0^\infty(B_2)$ so, dass $\psi = 1$ in B_1 und setzen

$$I_j = \int e^{iq(x)} a(x) \psi(2^{-j}x) dx.$$

Wir werden zuerst zeigen, dass $\lim_{j \rightarrow \infty} I_j$ existiert. Dazu gilt, mit der Variablentransformation $y = 2^{-j}x$,

$$\begin{aligned} I_j - I_{j-1} &= \int e^{iq(x)} a(x) (\psi(2^{-j}x) - \psi(2^{1-j}x)) dx \\ &= \int e^{i2^{2j}q(y)} a(2^j y) (\psi(y) - \psi(2y)) 2^{nj} dy \end{aligned}$$

Für die Funktion $\chi(y) = \psi(y) - \psi(2y) \in C_0^\infty$ erhalten wir, dass $\text{supp } \chi \subset \{y : 1/2 \leq |y| \leq 2\}$. Außerdem gilt, für $y \in \text{supp } \chi$,

$$\begin{aligned} |(\partial^\alpha a)(2^j y)| &\leq |\lambda^{-m}(\partial^\alpha a)|_0 \lambda^m(2^j y) \\ &\leq \|a\|_{|\alpha|} (1 + 2^{2j}|y|^2)^{m/2} \\ &\leq \|a\|_{|\alpha|} 2^{m(j+2)}. \end{aligned}$$

Aus Lemma 2.7 im Anschluss erhalten wir (mit $\mu = 2^j$ und $N = m + n + 1$)

$$|I_j - I_{j-1}| \leq C_{q,m} 2^{-j} \|a\|_{m+n+1},$$

woraus die Behauptung folgt.

Als zweiten Schritt beweisen wir nun, dass $\lim_{j \rightarrow \infty} I_j$ gleich (2.4) ist und daraus folgt, dass (2.4) für jedes (geeignete) $\varphi \in \mathcal{S}$ existiert und von der Wahl von φ unabhängig ist. Da für jedes fixe $\epsilon > 0$ mit dominierter Konvergenz gilt,

$$\int e^{iq(x)} a(x) \varphi(\epsilon x) dx = \lim_{j \rightarrow \infty} \int e^{iq(x)} a(x) \varphi(\epsilon x) \psi(2^{-j}x) dx,$$

setzen wir

$$I_j(\epsilon) = \int e^{iq(x)} a(x) (1 - \varphi(\epsilon x)) \psi(2^{-j}x) dx$$

und haben in dieser Notation zu zeigen, dass $\lim_{j \rightarrow \infty} I_j(\epsilon) = \mathcal{O}(\epsilon)$. Wir zuvor für I_j erhalten wir

$$I_j(\epsilon) - I_{j-1}(\epsilon) = \int e^{i2^{2j}q(y)} a(2^j y) (1 - \varphi(\epsilon 2^j y)) (\psi(y) - \psi(2y)) 2^{nj} dy.$$

Um nun eine Abschätzung für $b_\epsilon(x) = (1 - \varphi(\epsilon x)) a(x)$ an der Stelle $x = 2^j y$ zu bekommen, werden wir verwenden, dass im Träger der Funktion χ (siehe oben), nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung, gilt

$$|1 - \varphi(\epsilon 2^j y)| = |\varphi(0) - \varphi(\epsilon 2^j y)| \leq |0 - \epsilon 2^j y| \sup |\varphi'| \leq \epsilon C_1 2^j.$$

Daher ist

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha b_\epsilon(2^j y)| &\leq |(1 - \varphi(\epsilon 2^j y)) (\partial^\alpha a)(2^j y)| \\ &\leq \epsilon C_1 2^j C_2 2^{m(j+2)} \\ &\leq \epsilon C 2^{(m+1)j}. \end{aligned}$$

Wieder verwenden wir Lemma 2.7 (diesmal mit $\mu = 2^j$ und $N = m + n + 2$) um zu bekommen

$$|I_j(\epsilon) - I_{j-1}(\epsilon)| \leq \epsilon C 2^{-j}$$

was alle Behauptungen beweist.

q.e.d.

Lemma 2.7

Sei q eine nichtdegenerierte, reelle, quadratische Form auf \mathbb{R}^n und $\chi \in C_0^\infty$, mit $\chi = 0$ in einer Umgebung von 0. Dann gilt für alle $N \in \mathbb{Z}_+$,

$$\left| \int e^{i\mu^2 q(y)} b(\mu y) \chi(y) dy \right| \leq C_N \mu^{-N} \sup_{y \in \text{supp } \chi, |\alpha| \leq N} |(\partial^\alpha b)(\mu y)|,$$

wobei die Konstanten C_N nicht von $\mu \geq 1$ und $b \in C^\infty$ abhängen.

Beweis

Jede nichtdegenerierte, reelle, quadratische Form q hat eine Darstellung $q(x) = \frac{1}{2}xHx^T$, wobei die Hessematrix H regulär und symmetrisch ist. Es gibt dann eine unitäre Matrix U , die einer Variablentransformation entspricht, sodass $q(Ux) = \frac{1}{2}xDx^T$, wobei $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ die Diagonalmatrix mit den Eigenwerten von H bezeichnet. Durch entsprechende Vertauschung der Zeilen von U können wir außerdem erreichen, dass die Eigenwerte der Größe nach geordnet sind, $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$. Sei nun k die Anzahl der positiven Eigenwerte von H , so können wir, mit einer weiteren linearen Variablentransformation, q auf die Form $q(y) = yD_1y^T$ mit $D_1 = \text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$ der Diagonalmatrix aus k 1-Einträgen und $n - k$ (-1)-Einträgen, bringen. Teilen wir y in den Vektor y' der ersten k Komponenten und den Vektor y'' mit den Übrigen, so ist also o.B.d.A.

$$q(y) = |y'|^2 - |y''|^2.$$

Wir schreiben weiters $\partial'q$ für die ersten k Komponenten des Gradientenvektors von q und $\partial''q$ für die Restlichen, so ist der Operator

$$L = \frac{1}{2|y|^2} (\langle y', \partial' \rangle - \langle y'', \partial'' \rangle)$$

auf $\text{supp } \chi$ wohldefiniert (mit Komponenten in C^∞ , da $0 \notin \text{supp } \chi$) und er erfüllt

$$Lq = \frac{1}{2|y|^2} (\langle y', 2y' \rangle - \langle y'', -2y'' \rangle) = 1.$$

Um partiell integrieren zu können, brauchen wir auch den adjungierten Operator tL . Es gilt

$$\begin{aligned} \int Lf(y)g(y)dy &= \int (\langle y', \partial' f(y) \rangle - \langle y'', \partial'' f(y) \rangle) \frac{1}{2|y|^2} g(y) dy \\ &= \sum_{j=1}^k (-1) \int f(y) \partial_{y_j} \left(\frac{y_j}{2|y|^2} g(y) \right) dy \\ &\quad - \sum_{j=k+1}^n (-1) \int f(y) \partial_{y_j} \left(\frac{y_j}{2|y|^2} g(y) \right) dy \\ &= \int f(y) {}^tLg(y) dy, \end{aligned}$$

wobei

$${}^tL = -\langle \partial', \frac{y'}{2|y|^2} \rangle + \langle \partial'', \frac{y''}{2|y|^2} \rangle$$

wieder ein Differentialoperator erster Ordnung mit Koeffizienten in C^∞ ist. Integrieren wir N mal partiell, so bekommen wir

$$\begin{aligned} \int e^{i\mu^2 q(y)} b(\mu y) \chi(y) dy &= (i\mu^2)^{-N} \int (L^N e^{i\mu^2 q(y)}) b(\mu y) \chi(y) dy \\ &= (i\mu^2)^{-N} \int e^{i\mu^2 q(y)} ({}^tL)^N (b(\mu y) \chi(y)) dy \\ &= (i\mu^2)^{-N} \int e^{i\mu^2 q(y)} c_{\mu, N}(y) dy, \end{aligned}$$

wobei $c_{\mu,N}$ eine Linearkombination von Termen der Form $\mu^{|\alpha|}((\partial^\alpha b)(\mu y))(\partial^\beta \chi(y))$ mit Koeffizienten in C^∞ für $|\alpha + \beta| \leq N$ ist. Die Behauptung folgt, da χ kompakten Träger hat.

q.e.d.

Der nächste Satz besagt, dass sich oszillatorische Integrale im Wesentlichen genau wie absolut konvergente Integrale verhalten.

Satz 2.8

Integrale von der Art, wie sie in Satz 2.6 definiert wurden, haben die folgenden Eigenschaften

(i) *Ist A eine reelle, invertierbare Matrix, so gilt*

$$\int e^{iq(Ay)} a(Ay) |\det A| dy = \int e^{iq(x)} a(x) dx.$$

(ii) *Ist $a \in A^m, b \in A^l$, und $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, so gilt*

$$\int e^{iq(x)} a(x) \partial^\alpha b(x) dx = \int b(x) (-\partial)^\alpha (e^{iq(x)} a(x)) dx.$$

(iii) *Ist $a \in A^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p)$, dann ist $\int e^{iq(x)} a(x, y) dx \in A^m(\mathbb{R}^p)$ und*

$$\partial_y^\alpha \int e^{iq(x)} a(x, y) dx = \int e^{iq(x)} \partial_y^\alpha a(x, y) dx \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{Z}_+^p.$$

(iv) *Ist $a \in A^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p)$ und r eine reelle, nicht-degenerierte, quadratische Form auf \mathbb{R}^p , so gilt*

$$\int e^{ir(y)} \left(\int e^{iq(x)} a(x, y) dx \right) dy = \int e^{i(q(x)+r(y))} a(x, y) dx dy.$$

Beweis

Der Beweis des Satzes besteht darin, nachzuprüfen, dass es sich bei allen Ausdrücken um oszillatorische Integrale handelt und dann die Definition einzusetzen. Für die Aussagen (i) und (ii) liefert dies unmittelbar das gewünschte Ergebnis.

Für (iii) und (iv) gehen wir zurück zum Beweis von Satz 2.6. Dort haben wir Integrale von der Form

$$I_j(y) = \int e^{iq(x)} a(x, y) \psi(2^{-j}x) dx$$

betrachtet, die durch den regulierenden Faktor $\psi(2^{-j}x)$ absolut konvergent sind und es gilt daher

$$\partial_y^\alpha I_j(y) = I_j(y) = \int e^{iq(x)} \partial_y^\alpha a(x, y) \psi(2^{-j}x) dx.$$

Da $|\partial_x^\beta \partial_y^\alpha a(\mu z, y)| \leq C^{\alpha, \beta} (1 + |\mu z|^2 + |y|^2)^{m/2} \leq C_{\alpha, \beta} 5^{m/2} \mu^m (1 + |y|^2)^{m/2}$ für $|z| \leq 2$, erhalten wir aus Lemma 2.7 die Abschätzung

$$|\partial_y^\alpha I_j(y) - \partial_y^\alpha I_{j-1}(y)| \leq C_\alpha 2^{-j} (1 + |y|^2)^{m/2},$$

aus der die gleichmäßige Konvergenz der Folge $\partial_y^\alpha I_j(y)$ auf jeder kompakten Menge folgt. Daher ist der Limes $I(y)$ der Folge $I_j(y)$ in $A^m(\mathbb{R}^p)$ und erfüllt $\partial_y^\alpha I(y) = \lim_{j \rightarrow \infty} \partial_y^\alpha I_j(y)$, was die Formel aus (iii) produziert.

Außerdem zeigt diese Abschätzung auch, dass

$$|\partial_y^\alpha (I(y) - I_j(y))| \leq C_\alpha 2^{-j} (1 + |y|^2)^{m/2},$$

wodurch die Funktionen $b_j(y) = \psi(2^{-j}y)(I(y) - I_j(y))$ in $A^m(\mathbb{R}^p)$ liegen und $\|b_j\|_{m+p+1} \leq C_0 2^{-j}$ erfüllen. Wir können dann

$$\int e^{ir(y)} \left(\int e^{iq(x)} a(x, y) dx \right) dy = \lim_{j \rightarrow \infty} \int e^{ir(y)} I(y) \psi(2^{-j}y) dy$$

und

$$\int e^{ir(y)} I(y) \psi(2^{-j}y) dy = \int e^{ir(y)} I_j(y) \psi(2^{-j}y) dy + \int e^{ir(y)} b_j(y) dy$$

schreiben und erhalten daraus (iv), da

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int e^{ir(y)} I_j(y) \psi(2^{-j}y) dy = \int e^{i(q(x)+r(y))} a(x, y) dx dy$$

und

$$\left| \int e^{ir(y)} b_j(y) dy \right| \leq C_{r,m} \|b_j\|_{m+p+1} \leq C_{r,m} C_0 2^{-j}$$

q.e.d.

Satz 2.9

Sei $a \in A^m(\mathbb{R}^n)$, dann ist

$$(2\pi)^{-n} \int e^{-i\langle y, \eta \rangle} a(y) dy d\eta = (2\pi)^{-n} \int e^{-i\langle y, \eta \rangle} a(\eta) dy d\eta = a(0). \quad (2.5)$$

Beweis

Die Hessematrix der reellen, quadratischen Form $q(y, \eta) = \langle y, \eta \rangle$ auf \mathbb{R}^{2n} ist gegeben durch die reguläre, symmetrische Matrix

$$H_q = \begin{pmatrix} 0 & Id(n) \\ Id(n) & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Daher ist q nicht degeneriert und die Integrale in (2.5) sind oszillatorisch. Per Definition wählen wir also $\varphi \in \mathcal{S}$, mit $\varphi(0) = 1$ und es gilt

$$\int e^{-i\langle y, \eta \rangle} a(\eta) dy d\eta = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int e^{-i\langle y, \eta \rangle} a(\eta) \varphi(\epsilon y) \varphi(\epsilon \eta) dy d\eta.$$

Aus der Variablentransformation $z = \epsilon y$ und $\zeta = \eta/\epsilon$ folgt dann

$$\begin{aligned} \int e^{-i\langle y, \eta \rangle} a(\eta) \varphi(\epsilon y) \varphi(\epsilon \eta) dy d\eta &= \int e^{-i\langle z, \zeta \rangle} a(\epsilon \zeta) \varphi(z) \varphi(\epsilon^2 \zeta) dz d\zeta \\ &= \int \hat{\varphi}(\zeta) a(\epsilon \zeta) \varphi(\epsilon^2 \zeta) d\zeta. \end{aligned}$$

Ist $\epsilon < 1$, so gilt $|a(\epsilon \zeta)| \leq |\lambda^{-m} a|_0 (1 + |\epsilon \zeta|^2)^{m/2} \leq \|a\|_0 \lambda^m(\zeta)$ und da $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}$, ist dann

$$|\hat{\varphi}(\zeta) a(\epsilon \zeta) \varphi(\epsilon^2 \zeta)| \leq |\hat{\varphi}(\zeta)| \|a\|_0 \lambda^m(\zeta) |\varphi|_0 \in L^1.$$

Mittels dominierter Konvergenz können wir daher ϵ gegen 0 gehen lassen und erhalten

$$(2\pi)^{-n} \int e^{-i\langle y, \eta \rangle} a(y) dy d\eta = (2\pi)^{-n} \int \hat{\varphi}(\zeta) a(0) d\zeta = \varphi(0) a(0) = a(0).$$

q.e.d.

Beispiel 2.10

Sei $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$,

$$(2\pi)^{-n} \int e^{-i\langle y, \eta \rangle} \frac{y^\alpha \eta^\beta}{\alpha! \beta!} dy d\eta = \begin{cases} 0 & \text{für } \alpha \neq \beta \\ \frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!} & \text{für } \alpha = \beta \end{cases}$$

Beweis

Das Polynom $y^\alpha \eta^\beta$ ist in $A^{|\alpha+\beta|}$, wodurch es sich bei dem gegebenen Integral um ein oszillatorisches Integral handelt. Da $y^\alpha e^{-i\langle y, \eta \rangle} = (-D_\eta)^\alpha e^{-i\langle y, \eta \rangle}$, erhalten wir durch partielle Integration

$$(2\pi)^{-n} \int e^{-i\langle y, \eta \rangle} \frac{y^\alpha \eta^\beta}{\alpha! \beta!} dy d\eta = (2\pi)^{-n} \int e^{-i\langle y, \eta \rangle} \frac{D_\eta^\alpha}{\alpha!} \left(\frac{\eta^\beta}{\beta!} \right) dy d\eta$$

und die Funktion

$$a(\eta) = \frac{D_\eta^\alpha}{\alpha!} \left(\frac{\eta^\beta}{\beta!} \right) = \frac{(-i)^{|\alpha|}}{\beta!} \binom{\beta}{\alpha} \eta^{\beta-\alpha}$$

erfüllt $a(0) = 0$, falls $\beta \neq \alpha$ und $a(0) = (-i)^{|\alpha|}/\alpha!$, falls $\beta = \alpha$. Die Behauptung folgt nun sofort aus Satz 2.9.

q.e.d.

2.3 Asymptotische Entwicklung

Definition 2.11

Sei $a \in S^m$. Wenn wir zu jedem $j \in \mathbb{Z}_+$ ein $a_j \in S^{m-j}$ finden können, sodass

$$a - \sum_{j < k} a_j \in S^{m-k} \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+, \quad (2.7)$$

dann nennen wir $\sum_j a_j$ die *asymptotische Entwicklung* von a und schreiben $a \sim \sum_j a_j$ um (2.7) auszudrücken.

Lemma 2.12 (Asymptotische Entwicklung)

Sei $a_j \in S^{m-j}$ für $j \in \mathbb{Z}_+$. Dann existiert ein $a \in S^m$: $a \sim \sum_j a_j$, wobei a so gewählt werden kann, dass $\text{supp } a \subset \cup_j \text{supp } a_j$.

Falls $b \in S^m$ die gleiche asymptotische Entwicklung hat, so gilt $b - a \in S^{-\infty}$ (wir sagen auch a ist eindeutig Modulo $S^{-\infty}$).

Beweis

Wir wählen $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ so, dass $\varphi(\xi) \in [0, 1] \forall \xi$, $\varphi \equiv 1$ in B_1 und $\varphi \equiv 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus B_2$. Nun sei $\psi(\xi) = 1 - \varphi(\xi)$, $0 < \epsilon \leq 1$, dann ist

$$\psi(\epsilon\xi) = \begin{cases} 0 & \text{für } |\xi| < 1/\epsilon \\ 1 & \text{für } |\xi| \geq 2/\epsilon \end{cases}$$

und weiter

$$\partial_\xi^\gamma (\psi(\epsilon\xi)) = \epsilon^{|\gamma|} \partial_\xi^\gamma \psi(\epsilon\xi), \quad (2.8)$$

$$\forall \gamma \neq 0 : \quad \partial_\xi^\gamma \psi(\epsilon\xi) = 0 \quad \text{für } |\xi| \in \mathbb{R} \setminus \left[\frac{1}{\epsilon}, \frac{2}{\epsilon}\right] \quad (2.9)$$

Sei $(\epsilon_j)_j \in (0, 1)^\mathbb{N}$ eine (vorläufig beliebige) Folge, mit $\lim_{j \rightarrow \infty} \epsilon_j = 0$. Wir definieren:

$$b_j(x, \xi) = \psi(\epsilon_j \xi) a_j(x, \xi)$$

$$a(x, \xi) = \sum_{j \geq 0} b_j(x, \xi)$$

Da $\epsilon_j \rightarrow 0$ gibt es in einer Umgebung jedes Punktes nur endlich viele Summanden $b_j(x, \xi) \neq 0$. Daher ist $\sum_{j \geq 0} b_j(x, \xi)$ überall eine endliche Summe von Funktionen in C^∞ und somit $a(x, \xi) \in C^\infty$.

Für die Differenzen $b_j - a_j$ gilt, wegen $b_j = a_j$ für $|\xi| \geq \frac{2}{\epsilon}$, dass $b_j - a_j \in C_0^\infty \subset S^{-\infty}$ und daher $b_j \in S^{m-j}$.

Um zu zeigen, dass $a \in S^m$ brauchen wir jedoch noch genauere Abschätzungen für b_j . Dafür werden wir verwenden, dass

$$|\xi| \leq \frac{2}{\epsilon_j} \implies$$

$$\lambda \epsilon_j = (1 + |\xi|^2)^{1/2} \epsilon_j \leq \left(1 + \frac{4}{\epsilon_j^2}\right)^{1/2} \epsilon_j = (\epsilon_j^2 + 4)^{1/2} \leq \sqrt{5}$$

wodurch, mit $C_{j,\gamma} := \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\partial^\gamma \psi(\epsilon_j \xi)| \stackrel{(2.9)}{=} \sup_{|\xi| \in [1/\epsilon_j, 2/\epsilon_j]} |\partial^\gamma \psi(\epsilon_j \xi)| < \infty$,

unter Verwendung der Leibniz'schen Formel und (2.8), gilt

$$\begin{aligned}
|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta b_j| &= \left| \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} \partial_\xi^\gamma (\psi(\epsilon_j \xi)) \partial_x^\alpha \partial_\xi^{\beta-\gamma} a_j(x, \xi) \right| \\
&\leq \sum_{\gamma \leq \beta} C_\beta C_{j,\gamma} \epsilon_j^{|\gamma|} |\partial_x^\alpha \partial_\xi^{\beta-\gamma} a_j(x, \xi)| \\
&\leq \sum_{\gamma \leq \beta} C_{j,\alpha,\beta,\gamma} (\lambda \epsilon_j)^{|\gamma|} \lambda^{m-j-|\beta|} \\
&\leq C_{j,\alpha,\beta} \lambda^{m-j-|\beta|}
\end{aligned}$$

für gewisse Konstanten $C_{j,\alpha,\beta}$. Wir erhalten die selbe Art von Abschätzung für $|\xi| \geq \frac{2}{\epsilon_j}$, da dort $a_j = b_j$. Außerdem gilt, da $1 \leq \epsilon_j |\xi| \leq \epsilon_j \lambda$ innerhalb von $\text{supp}(1 - \varphi) \supset \text{supp } b_j$, können wir diese Abschätzung wie folgt verfeinern:

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta b_j| \leq \epsilon_j \lambda |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta b_j| \leq \epsilon_j C_{j,\alpha,\beta} \lambda^{m+1-j-|\beta|}$$

Wählen wir also $\epsilon_j \leq \min\{\frac{1}{C_{j,\alpha,\beta}} : |\alpha + \beta| \leq j\}$, so erhalten wir

$$|\lambda^{|\beta|-m} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta b_j| \leq \lambda^{1-j} \quad \text{für } |\alpha + \beta| \leq j.$$

Da $\epsilon_j \rightarrow 0$ ist die Summe $a(x, \xi) = \sum_{j \geq 0} b_j(x, \xi)$ in der Nähe jedes fixen ξ_0 endlich und diese Formel definiert daher eine Funktion $a \in C^\infty$. Sind $k \in \mathbb{Z}_+$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ fixiert, so setzen wir $N = \max(|\alpha + \beta|, k + 1)$ und schreiben

$$a - \sum_{j=0}^{k-1} a_j = \sum_{j=0}^{k-1} (b_j - a_j) + \sum_{j=k}^{N-1} b_j + \sum_{j \geq N} b_j$$

Die Summen $\sum_{j=0}^{k-1}$ und $\sum_{j=k}^{N-1}$ sind in S^{m-k} , da sie beide endliche Summen von Termen in S^{m-k} sind (es gilt sogar $b_j - a_j \in S^{-\infty}$). Was die letzte Summe betrifft, so ist

$$\begin{aligned}
|\lambda^{|\beta|-(m-k)} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \sum_{j \geq N} b_j| &\leq \sum_{j \geq N} |\lambda^{|\beta|-m+k} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta b_j| \\
&\leq \sum_{j \geq k+1} \lambda^{k+1-j} \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1},
\end{aligned}$$

da in dieser Summe $|\alpha + \beta| \leq j$ gilt und $\lambda \geq \sqrt{2}$ auf $\text{supp } b_j$. Wir erhalten daher $a - \sum_{j < k} a_j \in S^{m-k}$, und für $k = 0$ liefert das $a \in S^m$. Der Zusammenhang zwischen den Trägern ergibt sich aus der hier verwendeten, expliziten Konstruktion.

q.e.d.

Definition 2.13

Ist $S^m \ni a \sim \sum_j a_j$ und für alle j gilt: a_j ist homogen vom Grad $m - j$, so sagen wir, dass a *polyhomogen* ist. Für solche Symbole heißt $a_0(x, \xi)$ das *Hauptsymbol* von a .

Beispiele 2.14

Für $a(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$ sehen wir, dass a polyhomogen ist, da $a_j(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=j} a_\alpha(x) \xi^\alpha$ homogen von Grad j ist.

Die Symbole $\lambda^m(\xi)$ lassen sich darstellen als $\lambda^m(\xi) = |\xi|^m (|\xi|^{-2} + 1)^{m/2}$. Dabei hat der letzte Term eine Entwicklung in eine Potenzreihe von $|\xi|^{-2}$, die für $|\xi| > 1$ konvergiert. Somit sind auch sie polyhomogen.

Die Hauptsymbole zu a und λ sind gegeben durch $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$ bzw. $|\xi|^m$.

2.4 Operationen auf Symbolen**Lemma 2.15**

Sei $a \in S^0$ und $F \in C^\infty(\mathbb{C})$, dann ist $F(a) \in S^0$.

Beweis

Wir schreiben $a = b + ic$, wobei b und c reellwertige Funktionen sind. Da $a \in S^0$, folgt dass auch b und $c \in S^0 \subset C^0 \cap L^\infty$ und daher erfüllt die Funktion $F(a) = F(b, c)$ die Ungleichung $|(\partial^\gamma F)(b, c)| \leq C_\gamma$ für alle $\gamma \in \mathbb{Z}_+^2$. Die benötigte Abschätzung für $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (F(a))$ kann daraus leicht mittels vollständiger Induktion bewiesen werden.

q.e.d.**Definition und Satz 2.16**

Sei $a \in S^m$ und $b \in S^l$. Die oszillatorischen Integrale

$$a^*(x, \xi) = (2\pi)^{-n} \int e^{-i\langle y, \eta \rangle} \bar{a}(x - y, \xi - \eta) dy d\eta \quad (2.10)$$

$$a \# b(x, \xi) = (2\pi)^{-n} \int e^{-i\langle y, \eta \rangle} a(x, \xi - \eta) b(x - y, \eta) dy d\eta \quad (2.11)$$

definieren Symbole $a^* \in S^m$ und $a \# b \in S^{m+l}$ mit den asymptotischen Entwicklungen

$$a^* \sim \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha D_x^\alpha \bar{a} \quad \text{und} \quad a \# b \sim \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha a D_x^\alpha b \quad (2.12)$$

Bemerkung

Setzen wir für einen Moment voraus, dass es sich bei (2.10) bzw. (2.11) um oszillatorische Integrale handelt, dann sagt uns Satz 2.9, wie wir diese direkt auswerten können, falls die Integranden von nur einer der Integrationsvariablen abhängen. Für ein Symbol a etwa, welches ausschließlich eine Funktion von x (bzw. ξ) ist, erhalten wir als Adjungierte

$$a^*(x, \xi) = (2\pi)^{-n} \int e^{-i\langle y, \eta \rangle} \bar{a}(x - y) dy d\eta = \bar{a}(x) \quad (\text{bzw. } \bar{a}(\xi)).$$

Auch die Komposition zweier Symbole, $a\#b$, können wir in manchen Fällen auf diese Art identifizieren. So ist, falls $a = a(x)$,

$$a\#b(x, \xi) = (2\pi)^{-n} \int e^{-i\langle y, \eta \rangle} a(x) b(x - y, \xi) dy d\eta = a(x) b(x, \xi). \quad (2.13)$$

und entsprechend gilt für den Fall, dass $b = b(\xi)$,

$$a\#b(x, \xi) = (2\pi)^{-n} \int e^{-i\langle y, \eta \rangle} a(x, \xi - \eta) b(\xi) dy d\eta = a(x, \xi) b(\xi). \quad (2.14)$$

Diese Ergebnisse stimmen offensichtlich mit dem überein, was wir aus den entsprechenden asymptotischen Entwicklungen erhalten würden.

Beweis von Satz 2.16

Wie wir schon im Beweis von Satz 2.9 gesehen haben, ist die Hessematrix der quadratischen Form $q(y, \eta) = \langle y, \eta \rangle$, gegeben durch (2.6), regulär und q daher nicht degeneriert. Um zu sehen, dass es sich bei der Funktion $b_{x, \xi}(y, \eta) = \bar{a}(x - y, \xi - \eta)$ um eine Amplitude handelt, weisen wir darauf hin, dass Peetre's Ungleichung (Lemma 1.9) folgende Abschätzung ergibt

$$\begin{aligned} |\partial_y^\alpha \partial_\eta^\beta \bar{a}(x - y, \xi - \eta)| &\leq C_{\alpha, \beta} \lambda^m(\xi - \eta) \\ &\leq C_{\alpha, \beta} 2^{|\alpha|} \lambda^{|\alpha|}(\eta) \lambda^m(\xi) \\ &\leq C_{\alpha, \beta} 2^{|\alpha|} \lambda^m(\xi) (1 + |y|^2 + |\eta|^2)^{|\alpha|/2} \end{aligned}$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$, wodurch $b_{x, \xi} \in A^{|\alpha|}(\mathbb{R}^{2n})$ mit $\|b_{x, \xi}\|_{|\alpha|+2n+1} \leq C_0 \lambda^m(\xi)$. Aufgrund der Abschätzung in Satz 2.6, folgt, dass $\lambda^{-m} a^*$ beschränkt ist und da $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (a^*) = (\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a)^*$ und $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a \in S^{m-|\beta|}$ erhalten wir aus dem selben Grund Beschränktheit für $\lambda^{|\beta|-m} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a^*$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$, wodurch $a \in S^m$. Der Beweis von $a\#b \in S^{m+l}$ ist ähnlich, da die Funktion $c_{x, \xi}(y, \eta) = a(x, \xi - \eta) b(x - y, \xi)$ ein Element aus $A^{|\alpha|}(\mathbb{R}^{2n})$ ist und $\|c_{x, \xi}\|_{|\alpha|+2n+1} \leq C_0 \lambda^{m+l}(\xi)$ erfüllt und da

$$\partial^\alpha (a\#b) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\partial^\beta a) \# (\partial^{\alpha-\beta} b) \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^{2n}.$$

Um die asymptotische Entwicklung zu erhalten verwenden wir Taylor's Formel

$$\bar{a}(x - y, \xi - \eta) = \sum_{|\alpha+\beta| < 2k} \frac{(-y)^\alpha (-\eta)^\beta}{\alpha! \beta!} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \bar{a}(x, \xi) + r_k(x, \xi, y, \eta)$$

mit

$$r_k(x, \xi, y, \eta) = \sum_{|\alpha+\beta|=2k} 2k \frac{(-y)^\alpha (-\eta)^\beta}{\alpha! \beta!} r_{\alpha\beta}(x, \xi, y, \eta)$$

und

$$r_{\alpha\beta}(x, \xi, y, \eta) = \int_0^1 (1-t)^{2k-1} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \bar{a}(x - ty, \xi - t\eta) dt$$

Die Terme mit $|\alpha + \beta| < 2k$ geben nach Integration die Terme der Entwicklung im Hinblick auf Beispiel 2.10. Für r_k , das bezüglich (y, η) klarerweise in $A^{|m|+2k}$ ist, integrieren wir partiell wie in Beispiel 2.10:

$$\begin{aligned}
& \int e^{-i\langle y, \eta \rangle} \frac{(-y)^\alpha}{\alpha!} \frac{(-\eta)^\beta}{\beta!} r_{\alpha\beta}(x, \xi, y, \eta) dy d\eta \\
&= \frac{1}{\alpha!} \int \frac{(-\eta)^\beta}{\beta!} r_{\alpha\beta}(x, \xi, y, \eta) D_\eta^\alpha (e^{-i\langle y, \eta \rangle}) dy d\eta \\
&= \frac{1}{\alpha!} \int e^{-i\langle y, \eta \rangle} \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \left((-D_\eta)^\gamma \frac{(-\eta)^\beta}{\beta!} \right) ((-D_\eta)^{\alpha-\gamma} r_{\alpha\beta}(x, \xi, y, \eta)) dy d\eta \\
&= \sum_{\gamma \leq \alpha} \frac{(-i)^{|\gamma|} \gamma!}{\alpha! \beta!} \binom{\alpha}{\gamma} \binom{\beta}{\gamma} \int e^{-i\langle y, \eta \rangle} (-\eta)^{\beta-\gamma} (-D_\eta)^{\alpha-\gamma} r_{\alpha\beta}(x, \xi, y, \eta) dy d\eta
\end{aligned}$$

Eine zweite partielle Integration liefert dann

$$\sum_{\gamma \leq \alpha} \frac{(-i)^{|\gamma|} \gamma!}{\alpha! \beta!} \binom{\alpha}{\gamma} \binom{\beta}{\gamma} \int e^{-i\langle y, \eta \rangle} (-D_y)^{\beta-\gamma} (-D_\eta)^{\alpha-\gamma} r_{\alpha\beta}(x, \xi, y, \eta) dy d\eta$$

Verwenden wir nun die Definition von $r_{\alpha\beta}$, so haben wir

$$\begin{aligned}
& (-D_y)^{\beta-\gamma} (-D_\eta)^{\alpha-\gamma} r_{\alpha\beta}(x, \xi, y, \eta) \\
&= \int_0^1 (1-t)^{2k-1} (-it)^{2k-2|\gamma|} \partial_x^{\alpha+\beta-\gamma} \partial_\xi^{\alpha+\beta-\gamma} \bar{a}(x-ty, \xi-t\eta) dt.
\end{aligned}$$

Da $\gamma \leq \alpha$ und $\gamma \leq \beta$ erhält man auch $|\gamma| \leq k$ und $|\alpha + \beta - \gamma| > k$ und dann $\partial_x^{\alpha+\beta-\gamma} \partial_\xi^{\alpha+\beta-\gamma} \bar{a} \in S^{m-k}$. Dadurch können wir die obigen Berechnungen umformulieren zu

$$\int e^{-i\langle y, \eta \rangle} r_k(x, \xi, y, \eta) dy d\eta = \int e^{-i\langle y, \eta \rangle} s_k(x, \xi, y, \eta) dy d\eta$$

wobei die neue Amplitude $s_k \in A^{|m-k|}$ erfüllt, mit $\|s_k\|_{|m-k|+2n+1} \leq C_k \lambda^{m-k}(\xi)$. Wir erhalten daher die Beschränktheit von

$$\lambda^{k-m}(\xi) \int e^{-i\langle y, \eta \rangle} r_k(x, \xi, y, \eta) dy d\eta,$$

und unter Verwendung der selben Argumente wie oben, bekommen wir

$$\int e^{-i\langle y, \eta \rangle} r_k(x, \xi, y, \eta) dy d\eta \in S^{m-k}$$

bloß mit der Bemerkung, dass $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta r_k$ der Rest mit Index $2k$ in der Taylor Entwicklung von $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \bar{a}(x-y, \xi-\eta)$, für welches wir $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \bar{a} \in S^{m-|\beta|}$ haben. Schließlich erhalten wir die asymptotische Entwicklung von $a \# b$ entlang ganz analoger Argumentationslinien.

q.e.d.

Proposition 2.17

Die Operationen definiert in Satz 2.16 haben die Eigenschaften

- (i) $(a^*)^* = a$,
- (ii) $a\#1 = 1\#a = a$,
- (iii) $a\#(b\#c) = (a\#b)\#c$,
- (iv) $(a\#b)^* = b^*\#a^*$.

Beweis

Obige Identitäten werden wir als algebraische Gleichheiten der jeweils rechten und linken Seite erhalten. Dabei werden wir wiederholt die Aussage von Satz 2.9 verwenden.

Für (i) gilt dann

$$(a^*)^*(x, \xi) = (2\pi)^{-2n} \int e^{i(\langle y, \eta \rangle - \langle z, \zeta \rangle)} a(x - z - y, \xi - \zeta - \eta) dy d\eta dz d\zeta$$

und mit der Variablentransformation $Y = -y, H = \eta + \zeta, Z = z + y, \mathcal{Z} = \zeta$, erhalten wir

$$\begin{aligned} (a^*)^*(x, \xi) &= (2\pi)^{-2n} \int e^{-i(\langle Y, H \rangle + \langle Z, \mathcal{Z} \rangle)} a(x - Z, \xi - H) dY dH dZ d\mathcal{Z} \\ &= (2\pi)^{-2n} \int e^{-i\langle Z, \mathcal{Z} \rangle} \left(\int e^{-i\langle Y, H \rangle} a(x - Z, \xi - H) dY dH \right) dZ d\mathcal{Z} \\ &= (2\pi)^{-n} \int e^{-i\langle Z, \mathcal{Z} \rangle} a(x - Z, \xi) dZ d\mathcal{Z} = a(x, \xi). \end{aligned}$$

Die Aussage von (ii) ist ein Spezialfall der Spezialfälle in der Bemerkung zu Satz 2.16. Die Behauptung folgt sofort aus (2.13) und (2.14).

Um (iii) zu zeigen, schreiben wir einerseits

$$\begin{aligned} a\#(b\#c)(x, \xi) &= (2\pi)^{-2n} \int e^{-i(\langle y, \eta \rangle + \langle z, \zeta \rangle)} a(x, \xi - \eta) b(x - y, \xi - \zeta) \\ &\quad c(x - y - z, \xi) dy d\eta dz d\zeta \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} (a\#b)\#c(x, \xi) &= (2\pi)^{-2n} \int e^{-i(\langle Y, H \rangle + \langle Z, \mathcal{Z} \rangle)} a(x, \xi - \zeta - H) b(x - Y, \xi - \mathcal{Z}) \\ &\quad c(x - Z, \xi) dY dH dZ d\mathcal{Z} \end{aligned}$$

und diese beiden Größen sind, nach der Variablentransformation $y = Y, \eta = H + \mathcal{Z}, z = Z - Y, \zeta = \mathcal{Z}$, gleich.

Schließlich haben wir in (iv)

$$\begin{aligned} b^*\#a^*(x, \xi) &= (2\pi)^{-3n} \int e^{-i(\langle y, \eta \rangle + \langle z, \zeta \rangle + \langle t, \tau \rangle)} \bar{a}(x - t - y, \xi - \eta) \\ &\quad \bar{b}(x - z, \xi - \tau - \zeta) dy d\eta dz d\zeta dt d\tau \end{aligned}$$

und nach der Variablentransformation $Y = z - t - y$, $H = \eta - \tau - \xi$, $Z = t + y$, $\mathcal{Z} = \tau + \zeta$, $X = z - t$, $\Xi = \eta - \tau$,

$$\begin{aligned} b^* \# a^*(x, \xi) &= (2\pi)^{-3n} \int e^{-i(-\langle Y, H \rangle + \langle Z, \mathcal{Z} \rangle + \langle X, \Xi \rangle)} \bar{a}(x - Z, \xi - \mathcal{Z} - H) \\ &\quad \bar{b}(x - Z - Y, \xi - \mathcal{Z}) dY dH dZ d\mathcal{Z} dX d\Xi \\ &= (2\pi)^{-3n} \int e^{-i\langle Z, \mathcal{Z} \rangle} \\ &\quad \left(\int e^{-i\langle Y, H \rangle} \bar{a}(x - Z, \xi - \mathcal{Z} - H) \bar{b}(x - Z - Y, \xi - \mathcal{Z}) dY dH \right) dZ d\mathcal{Z}. \end{aligned}$$

Da der Ausdruck in Klammer gleich $a \# b(x - z, \xi - \mathcal{Z})$ ist, steht in der letzten Zeile die Definition von $(a \# b)^*$, was den Beweis vollendet.

q.e.d.

2.5 Pseudo-Differentialoperatoren (Ψ DO)

Definition und Satz 2.18

Sei nun $a \in S^\infty$ und $\varphi \in \mathcal{S}$, dann definiert die Formel

$$a(x, D)\varphi(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} a(x, \xi) \hat{\varphi}(\xi) d\xi \quad (2.15)$$

eine Funktion in \mathcal{S} .

Außerdem ist $a(x, D)\varphi$ stetig und es existiert $N \in \mathbb{Z}^+$ und $(C_k)_{k \in \mathbb{Z}^+}$ sodass $|a(x, D)\varphi|_k \leq C_k |\varphi|_{k+N}$

Beweis

Da $S^l \subset S^m$ für $l \leq m$, können wir annehmen, dass $a \in S^{2m}$ für ein $m \in \mathbb{Z}_+$. Weiters impliziert $\varphi \in \mathcal{S}$, dass $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}$ und wir können schreiben:

$$|a(x, D)\varphi(x)| \leq (2\pi)^{-n} \int |\lambda^{-2m} a|_0 |\lambda^{2m+2n} \hat{\varphi}|_0 \lambda^{-2n}(\xi) d\xi$$

was beweist (cf. Lemma 1.8), dass $a(x, D)\varphi$ beschränkt ist, mit $|a(x, D)\varphi|_0 \leq C |\hat{\varphi}|_{2m+2n}$. Dann ist $|a(x, D)\varphi|_0 \leq C_0 |\varphi|_N$ mit $N = 2m + 4n$ in Anbetracht von Satz 1.25. Darüberhinaus erhalten wir

$$\partial_j(a(x, D)\varphi(x)) = a(x, D)(\partial_j \varphi)(x) + (\partial_{x_j} a)(x, D)\varphi(x)$$

durch Differentiation unter dem \int und auch

$$x_j(a(x, D)\varphi(x)) = a(x, D)(x_j \varphi)(x) + i(\partial_{x_j} a)(x, D)\varphi(x)$$

durch partielle Integration. Daher kann $x^\alpha \partial^\beta (a(x, D)\varphi(x))$ als Linearkombination von Termen $(\partial_x^\gamma \partial_\xi^\delta a)(x, D)(x^{\alpha-\delta} \partial^{\beta-\gamma} \varphi)(x)$ geschrieben werden, sodass $a(x, D)\varphi \in \mathcal{S}$ mit $|a(x, D)\varphi|_k \leq C_k |\varphi|_{k+N}$.

q.e.d.

Der nächste Schritt besteht darin, zu beweisen, dass die Operationen der Adjungierung und Komposition von Operatoren $a(x, D)$ und $b(x, D)$ den Operationen entsprechen, die in Abschnitt 2.4 für deren Symbole vorgestellt wurden.

Satz 2.19

Für alle $a, b \in S^\infty$ und $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ gilt

- (i) $\langle a^*(x, D)\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, a(x, D)\psi \rangle$,
- (ii) $\langle a \# b(x, D)\varphi, \psi \rangle = \langle a(x, D)b(x, D)\varphi, \psi \rangle$.

Beweis

Analysieren wir zuerst die linke Seite von (i) und ersetzen jeden Term durch seine Definition, so erhalten wir für $J_1^* := \langle a^*(x, D)\varphi, \psi \rangle$ das oszillatorische Integral

$$J_1^* = (2\pi)^{-2n} \int \left(\int e^{i\langle x, \xi \rangle} \left(\iint e^{-i\langle y, \eta \rangle} \bar{a}(x-y, \xi-\eta) dy d\eta \right) \hat{\varphi}(\xi) d\xi \right) \bar{\psi}(x) dx,$$

beziehungsweise nach einer Variablentransformation $z = x - y$ und $\zeta = \xi - \eta$

$$J_1^* = (2\pi)^{-2n} \int e^{i(\langle x, \xi \rangle - \langle x-z, \xi-\zeta \rangle)} \bar{a}(z, \zeta) \hat{\varphi}(\xi) \bar{\psi}(x) dx d\xi dz d\zeta.$$

Bei dem Ausdruck auf der rechten Seite handelt es sich nicht um ein oszillatorisches Integral. Wir erhalten für die Größe $J_2^* := \langle \varphi, a(x, D)\psi \rangle = (2\pi)^{-n} \langle \hat{\varphi}, (a(x, D)\psi)^\wedge \rangle$ den Ausdruck

$$J_2^* = (2\pi)^{-2n} \int \hat{\varphi}(\xi) \left(\int e^{i\langle z, \xi \rangle} \left(\int e^{-i\langle z, \zeta \rangle} \bar{a}(z, \zeta) \left(\int e^{i\langle x, \zeta \rangle} \bar{\psi}(x) dx \right) d\zeta \right) dz \right) d\xi$$

Nach der Definition von oszillatorischen Integralen ist J_1 gleich dem Limes für $\epsilon \rightarrow 0$ des Integrals

$$J_\epsilon^* = (2\pi)^{-2n} \int \chi(\epsilon x) \chi(\epsilon \xi) \chi(\epsilon z) \chi(\epsilon \zeta) e^{i(\langle x, \xi \rangle - \langle x-z, \xi-\zeta \rangle)} \bar{a}(z, \zeta) \hat{\varphi}(\xi) \bar{\psi}(x) dx d\xi dz d\zeta,$$

wobei wir $\chi \in C_0^\infty$ so gewählt werden kann, dass $\chi = 1$ in B_1 . Daher ist die $J_2^* - J_\epsilon^* = J_\epsilon^1 + J_\epsilon^2 + J_\epsilon^3$, wobei die Terme der Darstellung gegeben sind als

$$\begin{aligned} J_\epsilon^1 &= (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle z, \xi \rangle} \hat{\varphi}(\xi) (1 - \chi(\epsilon \xi) \chi(\epsilon z)) \overline{a(z, D)\psi(z)} d\xi dz, \\ J_\epsilon^2 &= (2\pi)^{-2n} \int e^{i\langle z, \xi-\zeta \rangle} \hat{\varphi}(\xi) \bar{a}(z, \zeta) \chi(\epsilon \xi) \chi(\epsilon z) (1 - \chi(\epsilon \zeta)) \bar{\psi}(\zeta) d\xi dz d\zeta, \\ J_\epsilon^3 &= (2\pi)^{-2n} \int e^{i(\langle x, \zeta \rangle + \langle z, \xi-\zeta \rangle)} \hat{\varphi}(\xi) \bar{a}(z, \zeta) \chi(\epsilon \xi) \chi(\epsilon z) \chi(\epsilon \zeta) (1 - \chi(\epsilon x)) \bar{\psi}(x) d\xi dz d\zeta dx. \end{aligned}$$

Dabei geht J_ϵ^1 gegen 0 mit $\epsilon \rightarrow 0$ wegen des Satzes der Dominierten Konvergenz. Die anderen beiden Integrale gehen gegen 0 unter Verwendung des nun folgenden Lemma 2.20.

q.e.d.

Lemma 2.20

Sei $a(x, y) \in A^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p)$, φ eine reell-wertige Funktion und seien χ, ψ und $\omega \in \mathcal{S}$, wobei $\chi = 1$ in B_1 . Dann ist

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int e^{i\varphi(x, y)} a(x, y) \omega(\epsilon x) (1 - \chi(\epsilon y)) \bar{\psi}(y) dx dy = 0.$$

Beweis

Die Variablentransformation $z = \epsilon x$ ergibt

$$\int e^{i\varphi(z/\epsilon, y)} a(z/\epsilon, y) \omega(z) (1 - \chi(\epsilon y)) \bar{\psi}(y) \epsilon^{-n} dz dy$$

und falls $0 < \epsilon < 1$ können wir folgende Abschätzung in Verbindung mit $a(z/\epsilon, y)$ verwenden:

$$\begin{aligned} (1 + |\frac{z}{\epsilon}|^2 + |y|^2)^{m/2} &\leq (\epsilon^{-2} + |\frac{z}{\epsilon}|^2 + \epsilon^{-2}|y|^2 + |\frac{z}{\epsilon}|^2|y|^2)^{m/2} \\ &= \epsilon^{-m} (1 + |z|^2)^{m/2} (1 + |y|^2)^{m/2}. \end{aligned}$$

Ist $y \in \text{supp}(1 - \chi(\epsilon y))$, so gilt $|y| \geq 1/\epsilon$ und damit erhalten wir

$$|\bar{\psi}(y)| \leq |\psi|_{2(m+n+p)} \left(\frac{1 + |y|^2}{1 + p} \right)^{-m-n-p} \leq C_\psi \epsilon^{m+n+p} (1 + |y|^2)^{-\frac{m+n+p}{2}},$$

sodass schließlich

$$\begin{aligned} |e^{i\varphi(z/\epsilon, y)} a(z/\epsilon, y) \omega(z) (1 - \chi(\epsilon y)) \bar{\psi}(y) \epsilon^{-n}| \\ \leq \epsilon^p \|a\|_0 C_\psi (1 + |z|^2)^{m/2} |\omega(z)| (1 + |y|^2)^{-\frac{n+p}{2}}, \end{aligned}$$

woraus nach Integration die Behauptung folgt.

q.e.d.

Korollar 2.21

Für alle $a, b \in S^\infty$ und $\varphi \in \mathcal{S}$ gilt

$$\|a \# b(x, D)\varphi\|_{(0)} = \|a(x, D)b(x, D)\varphi\|_{(0)}$$

Beweis

Aufgrund der Identitäten aus Proposition 2.17 gilt

$$\begin{aligned} \|a \# b(x, D)\varphi\|_{(0)}^2 &= \langle a \# b(x, D)\varphi, a \# b(x, D)\varphi \rangle \\ &= \langle (a \# b)^*(x, D)a(x, D)b(x, D)\varphi, \varphi \rangle \\ &= \langle b^*(x, D)a^*(x, D)a(x, D)b(x, D)\varphi, \varphi \rangle \\ &= \langle a(x, D)b(x, D)\varphi, a(x, D)b(x, D)\varphi \rangle = \|a(x, D)b(x, D)\varphi\|_{(0)}^2 \end{aligned}$$

q.e.d.

Damit können wir nun die Wirkung von $a(x, D)$ auf \mathcal{S}' erweitern.

Definition 2.22

Sei $a \in S^\infty$, der **Pseudo-Differentialoperator** mit Symbol a ist der Operator: $a(x, D) : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$, definiert durch seine Wirkung:

$$\langle a(x, D)u, \varphi \rangle := \langle u, a^*(x, D)\varphi \rangle \quad \text{für } u \in \mathcal{S}', \varphi \in \mathcal{S}.$$

Wir sagen das $a(x, D)$ Ordnung m hat, wenn $a \in S^m$ und schreiben Ψ^m für die Menge der Pseudo-Differentialoperatoren der Ordnung m . Analog zur Notation bei Symbolen sei $\Psi^\infty = \bigcup_m \Psi^m$ die Menge aller und $\Psi^{-\infty} = \bigcap_m \Psi^m$ die Menge der glättenden Pseudo-Differentialoperatoren. Bevor wir diese Definition verwenden, betrachten wir zuerst ein Beispiel.

Beispiel 2.23

Für jedes Polynom $p(x)$, $a \in S^\infty$, und $u \in \mathcal{S}'$ gilt

$$a(x, D)(p(x)u) = \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} D_x^\alpha p(x) (\partial_\xi^\alpha a)(x, D)u.$$

Beweis

Aufgrund der Linearität des Operators $a(x, D)$, genügt es die Aussage für $p(x) = x^\beta$ zu zeigen. Für $\varphi \in \mathcal{S}$ gilt

$$\begin{aligned} x^\beta a^*(x, D)\varphi(x) &= (2\pi)^{-n} \int x^\beta e^{i\langle x, \xi \rangle} a^*(x, \xi) \hat{\varphi}(\xi) d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} (-D_\xi)^\beta (a^*(x, \xi) \hat{\varphi}(\xi)) d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} \sum_{\alpha} \binom{\beta}{\alpha} ((-D_\xi)^\alpha a^*)(x, \xi) \widehat{x^{\beta-\alpha}\varphi}(\xi) d\xi \\ &= \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} (D_\xi^\alpha a)^*(x, D) ((\partial^\alpha x^\beta)\varphi)(x), \end{aligned}$$

da $\binom{\beta}{\alpha} = x^{\beta-\alpha} = \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha x^\beta$. Wir erhalten daher aus der Definition der Wirkung eines Ψ DO auf eine Distribution

$$\begin{aligned} \langle a(x, D)(x^\beta u), \varphi \rangle &= \langle u, x^\beta a^*(x, D)\varphi \rangle = \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \langle u, (D_\xi^\alpha a)^*(x, D) ((\partial^\alpha x^\beta)\varphi) \rangle \\ &= \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \langle (\partial^\alpha x^\beta)(D_\xi^\alpha a)(x, D)u, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt, indem wir den Faktor $(-i)^{|\alpha|}$ von D_ξ^α zu ∂^α verschieben.

q.e.d.

Die Bezeichnung *glättende Operatoren* für die Elemente in $\Psi^{-\infty}$ ist vor allem durch den folgenden Satz gerechtfertigt.

Satz 2.24

Sei $a \in S^m$. Für alle $s \in \mathbb{R}$ gilt: $u \in H^s \implies a(x, D)u \in H^{s-m}$ und es existiert C_s so, dass $\|a(x, D)u\|_{(s-m)} \leq C_s \|u\|_{(s)}$.

Beweis

Wir werden zuerst zeigen, dass es genügt die Aussage für $b \in S^0$ und $\psi \in \mathcal{S}$ zu beweisen. Haben wir nämlich für $b \in S^0$ eine Abschätzung der Art

$$\|b(x, D)\psi\|_{(0)} \leq C_b \|\psi\|_{(0)} \quad \forall \psi \in \mathcal{S}$$

gezeigt, dann können wir, wenn $a \in S^m$ und $s \in \mathbb{R}$ ist, $b = \lambda^{-s} \# a^* \# \lambda^{s-m} \in S^0$ setzen und erhalten unter Verwendung von Proposition 2.2, dass für $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned} \|a^*(x, D)\varphi\|_{(-s)} &= \|\lambda^{-s}(D)a^*(x, D)\varphi\|_{(0)} = \|b(x, D)\lambda^{m-s}(D)\varphi\|_{(0)} \\ &\leq C_b \|\lambda^{m-s}(D)\varphi\|_{(0)} = C_b \|\varphi\|_{(m-s)}. \end{aligned}$$

Dann ist für $u \in H^s$ und φ weiterhin aus \mathcal{S}

$$|\langle a(x, D)u, \varphi \rangle| = |\langle u, a^*(x, D)\varphi \rangle| \leq \|u\|_{(s)} \|a^*(x, D)\varphi\|_{(-s)} \leq C_b \|u\|_{(s)} \|\varphi\|_{(m-s)}.$$

Aufgrund von Proposition 1.36 impliziert dies, dass $a(x, D)u \in H^{s-m}$ mit $\|a(x, D)u\|_{(s-m)} \leq C_b \|u\|_{(s)}$ wie behauptet.

Zu zeigen bleibt also $\|b(x, D)\psi\|_{(0)} \leq C_b \|\psi\|_{(0)}$, $\psi \in \mathcal{S}$, für ein beliebiges $b \in S^0$. Dies werden wir in drei Schritte aufteilen: (i) $b \in S^{-n-1}$, (ii) $b \in S^m$ mit $m < 0$ und (iii) $b \in S^0$.

(i) Sei $b \in S^{-n-1}$ und $\psi \in \mathcal{S}$. Es gilt dann

$$\begin{aligned} b(x, D)\psi(x) &= (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} b(x, \xi) \hat{\psi}(\xi) d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \iint e^{i\langle x-y, \xi \rangle} b(x, \xi) \psi(y) dy d\xi \\ &= \int K(x, y) \psi(y) dy \end{aligned}$$

wobei

$$K(x, y) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x-y, \xi \rangle} b(x, \xi) d\xi,$$

da alle diese Integrale aufgrund der Bedingung $b \in S^{-n-1}$ absolut konvergent sind (vgl. Lemma 1.8). Diese Kern erfüllt für jedes $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

$$\begin{aligned} |(x-y)^\alpha K(x, y)| &= |(2\pi)^{-n} \int (x-y)^\alpha e^{i\langle x-y, \xi \rangle} b(x, \xi) d\xi| \\ &= |(2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x-y, \xi \rangle} \partial_\xi^\alpha b(x, \xi) d\xi| \leq C_\alpha \end{aligned}$$

nach partieller Integration, da $\lambda^{n+1+|\alpha|} \partial_\xi^\alpha b$ beschränkt ist. Daher gibt es eine Konstante C , sodass $(1 + |x-y|^2)^n |K(x, y)| \leq C/\pi^n$ und somit gilt

$$\int |K(x, y)| dx \leq C \quad \text{und} \quad \int |K(x, y)| dy \leq C.$$

Daher folgt das Resultat aus dem Lemma von Schur (Lemma 2.25) im Anschluss.

- (ii) Da $\bigcup_{m < 0} S^m = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} S^{-1/2^k}$, genügt es die Eigenschaft $\|b(x, D)\psi\|_{(0)} \leq C_b \|\psi\|_{(0)}$ für die Symbole $b \in S^{-1/2^k}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ zu zeigen und dies geschieht mittels Induktion nach k . Tatsächlich ist die Behauptung für ein negatives k wahr, so zum Beispiel für $k = -n$ nach Schritt (i). Ist nun $b \in S^{-1/2^{k+1}}$, dann ist $b^* \# b \in S^{-1/2^k}$ und wir können unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung schreiben

$$\begin{aligned} \|b(x, D)\psi\|_{(0)}^2 &= \langle b(x, D)\psi, b(x, D)\psi \rangle = \langle b^* \# b(x, D)\psi, \psi \rangle \\ &\leq \|b^* \# b(x, D)\psi\|_{(0)} \|\psi\|_{(0)} \leq C_{b^* \# b} \|\psi\|_{(0)}^2, \end{aligned}$$

wodurch also $\|b(x, D)\psi\|_{(0)} \leq C_b \|\psi\|_{(0)}$ mit $C_b = C_{b^* \# b}^{1/2}$.

- (iii) Ist nun $b \in S^0$, dann ist b beschränkt und $|b|_0^2 - |b|^2 \in S^0$ ist nicht-negativ. Wir können eine Funktion $F \in C^\infty(\mathbb{C})$ wählen, sodass $F(z) = (1+z)^{1/2}$ für $z \in \mathbb{R}_+$ und es folgt aus Lemma 2.15, dass $a := (1 + |b|_0^2 - |b|^2)^{1/2} = F(|b|_0^2 - |b|^2) \in S^0$. Man weiß, dass $a^* = \bar{a}$ und $a^* \# a = |a|^2$ modulo S^{-1} und dann gibt es ein $c \in S^{-1}$, sodass

$$a^* \# a + b^* \# b = 1 + |b|_0^2 + c.$$

Daher können wir schreiben

$$\begin{aligned} \|b(x, D)\psi\|_{(0)}^2 &\leq \|a(x, D)\psi\|_{(0)}^2 + \|b(x, D)\psi\|_{(0)}^2 \\ &= \langle (a^* \# a + b^* \# b)(x, D)\psi, \psi \rangle \\ &\leq \langle (1 + |b|_0^2)\psi, \psi \rangle + \langle c(x, D)\psi, \psi \rangle \\ &\leq (1 + |b|_0^2 + C_c) \|\psi\|_{(0)}^2, \end{aligned}$$

da $c \in S^{-1}$, aufgrund von Schritt (ii), $\|c(x, D)\psi\|_{(0)} \leq C_c \|\psi\|_{(0)}$ erfüllt.

q.e.d.

Lemma 2.25 (Schur)

Sei $K(x, y)$ eine meßbare Funktion definiert auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, die

$$\int |K(x, y)| dx \leq C \quad \text{und} \quad \int |K(x, y)| dy \leq C$$

für ein C erfüllt. Dann gilt für jedes $\psi \in L^2$, dass $K(x, y)\psi(y) \in L^1(dy)$ für fast alle x und die Funktion $\varphi(x) = \int K(x, y)\psi(y) dy$ ist quadratisch integrierbar über \mathbb{R}^n mit $\|\varphi\|_0 \leq C\|\psi\|_0$.

Beweis

Die Funktion $K(x, y)\psi(y)\overline{K(x, z)\psi(z)}$ ist integrierbar über $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, da $|\psi(y)\bar{\psi}(z)| \leq \frac{1}{2}(|\psi(y)|^2 + |\psi(z)|^2)$ und

$$\int \frac{1}{2}|\psi(y)|^2 \left(\int |K(x, y)| \left(\int |K(x, z)| dz \right) dx \right) dy \leq \frac{C^2}{2} \|\psi\|_0^2 < \infty.$$

Deshalb ist, durch den Satz von Fubini, $K(x, y)\psi(y) \in L^1(dy)$ für fast alle x und

$$\begin{aligned} \int |\varphi(x)|^2 dx &= \int \left(\int K(x, y) \psi(y) dy \right) \left(\int \overline{K(x, z) \psi(z)} dz \right) dx \\ &\leq C^2 \|\psi\|_0^2. \end{aligned}$$

q.e.d.

Satz 2.26

Ist $a \in S^{-\infty}$, so bildet $a(x, D)$ Distributionen in \mathcal{E}' nach \mathcal{S} ab und solche in \mathcal{S}' nach \mathcal{P} ab. Genauso bildet der Ψ DO zu $a \in S^\infty$ die Räume \mathcal{S} und \mathcal{P} in sich selbst ab.

Beweis

Für $a \in S^{-\infty}$ und $u \in \mathcal{E}'$ gilt $u = \psi u$ für jedes $\psi \in C_0^\infty$ mit $\psi = 1$ in $\text{supp } u$, wodurch wir erhalten, dass $u \in H^{-N}$, für ein $N \in \mathbb{Z}_+$ (vgl. Lemma 1.37). Nach Satz 2.24 ist daher $a(x, D)u \in H^n$ und daher stetig und beschränkt (vgl. Lemma 1.35). Unter Verwendung des selben Arguments wie im Beweis von Satz 2.18 können wir dann $x^\alpha \partial^\beta (a(x, D)u)$ als Linear-Kombination von Termen $(\partial_x^\gamma \partial_\xi^\delta a)(x, D)(x^{\alpha-\delta} \partial^{\beta-\gamma} u)$ schreiben, die mit der selben Begründung ebenfalls beschränkt und stetig sind. Folglich ist $a(x, D)u \in \mathcal{S}$.

Ist $u \in \mathcal{S}'$, so gilt, mit $b_\alpha = \xi^\alpha \# a \in S^{-\infty}$,

$$D^\alpha (a(x, D)u) = b_\alpha(x, D)u.$$

Nach Lemma 1.37 gibt es ein $N \in \mathbb{Z}_+$, sodass $v = (1 + |x|^2)^{-N} u \in H^{-N}$ und somit ist

$$b_\alpha(x, D)u = b_\alpha(x, D)((1 + |x|^2)^N v) = \sum_{\beta} \frac{1}{\beta!} (D_x^\beta (1 + |x|^2)^N) (\partial_\xi^\beta b_\alpha)(x, D)v$$

(vgl. Beispiel 2.23), wobei weiterhin $\partial_\xi^\beta b_\alpha \in S^{-\infty}$ für alle α und β gilt. Daher ist $(\partial_\xi^\beta b_\alpha)(x, D)v$ eine stetige und beschränkte Funktion, da es wegen Satz 2.24 in H^n ist. Es gilt also $D^\alpha (a(x, D)u) = b_\alpha(x, D)u \in \mathcal{P}^0$ (vgl. Definition 1.12).

In Satz 2.18 haben wir schon gezeigt, dass $a(x, D)\varphi \in \mathcal{S}$ für $a \in S^m$ und $\varphi \in \mathcal{S}$. Wir betrachten daher als Nächstes $u \in \mathcal{P}$. Zuerst halten wir fest, dass $\lambda^{2k}(D)u \in \mathcal{P}^0$ für jedes $k \in \mathbb{Z}_+$, da $\lambda^{2k}(D)$ ein Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten ist. Es gibt daher ein $N \in \mathbb{Z}_+$ in Abhängigkeit von k , sodass $v = (1 + |x|^2)^{-N} \lambda^{2k}(D)u \in L^2$ (vgl. Lemma 1.8). Für fixes $\alpha \in \mathbb{Z}_+$ wählen wir also k so, dass $2k \geq m + |\alpha| + n$, woraus folgt, dass $b_\alpha = \xi^\alpha \# a \# \lambda^{-2k} \in S^{-n}$. Daher können wir – genau wie zuvor – schreiben

$$\begin{aligned} D^\alpha (a(x, D)u) &= b_\alpha(x, D)\lambda^{2k}(D)u = b_\alpha(x, D)((1 + |x|^2)^N v) \\ &= \sum_{\beta} \frac{1}{\beta!} (D_x^\beta (1 + |x|^2)^N) (\partial_\xi^\beta b_\alpha)(x, D)v \end{aligned}$$

Hier ist nun $\partial_\xi^\beta b_\alpha \in S^{-n}$ und $v \in L^2 = H^0$, sodass $(\partial_\xi^\beta b_\alpha)(x, D)v \in H^n$ nach Satz 2.24 und wir erhalten die selbe Folgerung wie oben.

q.e.d.

Definition 2.27

Ein Symbol $a \in S^m$ heißt **elliptisch**, falls ein $\epsilon > 0$ existiert, sodass

$$|a(x, \xi)| \geq \epsilon \lambda^m(\xi) \quad \text{für } |\xi| \geq \frac{1}{\epsilon}. \quad (2.16)$$

Ebenso sagen wir, dass ein Operator $a(x, D) \in \Psi^m$ elliptisch ist, wenn es sein Symbol ist.

Wir werden nun sehen, dass Ψ DO genau dann eine approximative Inverse (d.h. modulo $\Psi^{-\infty}$) besitzen, wenn sie elliptisch sind. Wie so oft transformieren wir diese Charakterisierung einer Operatorenklasse auf eine Aussage über deren Symbole und führen die Berechnungen dort aus. Dazu müssen wir laut Satz 2.19 Invertierbarkeit der Symbole bezüglich der Verknüpfung $\#$ zeigen. Das neutrale Element bezüglich dieser Operation, die konstante 1 Funktion, liegt in S^0 , sodass es natürlich scheint eine Inverse zu $a \in S^m$ in der Klasse S^{-m} zu suchen.

Satz 2.28

Sei $a \in S^m$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i) Es gibt ein $b \in S^{-m}$, sodass $a \# b - 1 \in S^{-\infty}$.
- (ii) Es gibt ein $b \in S^{-m}$, sodass $b \# a - 1 \in S^{-\infty}$.
- (iii) Es gibt ein $b_0 \in S^{-m}$, sodass $ab_0 - 1 \in S^{-1}$.
- (iv) a ist elliptisch.

Erfüllt das Symbol a diese Bedingungen, so existiert außerdem ein $a^\# \in S^{-m}$ sodass

$$b \text{ löst (i)} \Leftrightarrow b \text{ löst (ii)} \Leftrightarrow b - a^\# \in S^{-\infty}$$

Beweis

Ist $a \in S^m, b \in S^{-m}$, dann ist $a \# b = b \# a = ab$ modulo S^{-1} in Anbetracht von Satz 2.16. Daher implizieren die Aussagen (i) und (ii) die Aussage (iii).

Für ein Symbol in $c \in S^{-1}$ gilt insbesondere, dass $|c(x, \xi)|$ mit wachsendem ξ gegen 0 geht und daher folgt aus (iii), dass es ein $\epsilon_1 > 0$ gibt, sodass $|ab_0(x, \xi) - 1| \leq \frac{1}{2}$ für $|\xi| \geq \frac{1}{\epsilon_1}$. Dazu ist für solche ξ notwendigerweise $|ab_0(x, \xi)| \geq \frac{1}{2}$ und weiters

$$\frac{1}{2} \leq |ab_0(x, \xi)| \leq |a(x, \xi)| \frac{|b_0 \lambda^m(x, \xi)|}{\lambda^m(\xi)} \leq |a(x, \xi)| \frac{|b_0 \lambda^m|_0}{\lambda^m(\xi)}.$$

Da $b_0 \in S^{-m}$, ist $\lambda^m b_0$ beschränkt und wenn wir $\epsilon = \min(\epsilon_1, 1/(2|b_0 \lambda^m|_0))$ wählen, erhalten wir (iv).

Ist andererseits (iv) erfüllt, dann ist $c = \lambda^{-m} a \in S^0$ und erfüllt $|c(x, \xi)| \geq \epsilon$ für $|\xi| \geq 1/\epsilon$. Ist $F(z) = 1/z$ für $|z| \geq \epsilon$, so können wir F auf \mathbb{C} zu einer C^∞ Funktion erweitern und dann ist $F(c) \in S^0$ dank Lemma 2.15. Setzen wir nun $b_0 = \lambda^{-m} F(c)$, so folgt $b_0 \in S^{-m}$ und für $|\xi| \geq 1/\epsilon$ gilt $ab_0(x, \xi) = 1$. Also hat

$ab_0 - 1$ kompakten Träger bezüglich ξ und ist daher in S^{-1} .

Abschließend werden wir zeigen, dass aus (iii) sowohl (i), also auch (ii) folgt (Die Äquivalenz von (i) und (ii) ergibt sich dann aus $(i) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (ii)$). Allgemein wissen wir aus der asymptotischen Entwicklung der Verknüpfung $\#$ in (2.12), dass $a\#b_0 - ab_0 \in S^{-1}$. Wenn (iii) erfüllt ist muss daher auch

$$a\#b_0 - 1 = (a\#b_0 - ab_0) + (ab_0 - 1) \in S^{-1}$$

gelten und das heißt es gibt $r_1 \in S^{-1}$, sodass $a\#b_0 = 1 - r_1$. Mit dem gleichen Argument bekommen wir auch ein $s_1 \in S^{-1}$, sodass $b_0\#a = 1 - s_1$. Wir werden nun daraus Symbole b und c konstruieren, die $a\#b \in S^{-\infty}$ beziehungsweise $c\#a \in S^{-\infty}$ erfüllen. Dazu setzen wir $r_j = r_1\#r_{j-1} \in S^{-j}$, $s_j = s_1\#s_{j-1} \in S^{-j}$ und damit

$$b_j = b_0\#r_j \in S^{-m-j}, \quad c_j = s_j\#b_0 \in S^{-m-j}.$$

Nach Lemma 2.12 können wir $b \sim \sum_{j \geq 0} b_j \in S^{-m}$ und $c \sim b_0 + \sum_{j \geq 1} c_j \in S^{-m}$ wählen. Wir erhalten dann für jedes fixe $k \in \mathbb{Z}_+$ die folgenden Gleichungen modulo S^{-k} :

$$\begin{aligned} a\#b &= a\# \sum_{j < k} b_j = a\#b_0\# \left(1 + \sum_{0 < j < k} r_j \right) \\ &= (1 - r_1)\# \left(1 + \sum_{0 < j < k} r_j \right) \\ &= 1 - r_1 + \sum_{0 < j < k} r_j - \sum_{1 < j \leq k} r_j = 1 - r_k = 1 \end{aligned}$$

und ganz analog

$$\begin{aligned} c\#a &= \left(b_0 + \sum_{0 < j < k} c_j \right) \#a = \left(1 + \sum_{0 < j < k} s_j \right) \#b_0\#a \\ &= \left(1 + \sum_{0 < j < k} s_j \right) \#(1 - s_1) \\ &= 1 - s_1 + \sum_{0 < j < k} s_j - \sum_{1 < j \leq k} s_j = 1 - s_k = 1 \end{aligned}$$

da r_k und $s_k \in S^{-k}$. Da k beliebig gewählt werden kann, bekommen wir, dass $a\#b - 1 \in S^{-\infty}$ und $c\#a - 1 \in S^{-\infty}$.

Schließlich, falls b (ii) löst und c die Bedingung $c\#a - 1 \in S^{-\infty}$ erfüllt, so erhalten wir modulo $S^{-\infty}$

$$b = (c\#a)\#b = c\#(a\#b) = c$$

woraus die Eindeutigkeit der Inversen modulo $S^{-\infty}$ folgt.

Sind andererseits $b - a\#$, $a\#a\# - 1$, und $a\#\#a - 1$ in $S^{-\infty}$, so gilt dies auch für

$$a\#b - 1 = (a\#a\# - 1) + (a\#(b - a\#)) \quad \text{und} \quad b\#a - 1 = (a\#\#a - 1) + ((b - a\#)\#a)$$

da es für die vier auf den rechten Seiten auftretenden Terme erfüllt ist.

q.e.d.

Um lokale Aussagen treffen zu können wird es wichtig sein, den Begriff der Elliptizität (und der ist - wie wir eben gesehen haben - gleichbedeutend mit Invertierbarkeit) von a auch in einem Punkt (x_0, ξ_0) zu beschreiben. Da aber alle Symbole b mit kompaktem Träger automatisch in $S^{-\infty}$ liegen, müssen wir zuvor die Bedeutung von örtlicher Beschränktheit für Symbole so einführen, dass dabei deren Ordnung erhalten bleibt. Im Anschluss sehen wir zwei Definitionen, die dies ermöglichen.

Definition 2.29

- (i) Sei Γ eine kegelförmige, offene Menge in $T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$. Ist $a \in S^m$, so sagen wir, dass $a \in \mathbf{S}_{\text{komp}}^m(\Gamma)$, falls es eine kompakte Menge $K \subset \Gamma$ gibt, sodass

$$\text{supp } a \subset \{(x, t\xi) \mid (x, \xi) \in K \wedge t > 0\}.$$

- (ii) Für ein Symbol $a \in S^\infty$ sagen wir, dass a in Γ (also lokal) ein Symbol der Klasse S^m ist, kurz $a \in \mathbf{S}_{\text{lok}}^m(\Gamma)$, falls für alle $b \in S_{\text{komp}}^0(\Gamma)$ gilt $ab \in S^m$.

Weiters heißt a *nicht-charakteristisch* in einem Punkt $(x_0, \xi_0) \in T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$, falls ein Symbol $b \in S^{-m}$ und eine kegelförmige Umgebung Γ von (x_0, ξ_0) existieren, sodass $ab - 1 \in S_{\text{lok}}(\Gamma)$. Die Menge aller charakteristischen Punkte bezeichnen wir mit **Char** (\mathbf{a}).

Kapitel 3

Mikrolokale Analysis

Zu Beginn dieses Kapitel wollen wir den Begriff des Singulären Trägers ($\text{sing supp } u$) einer Distribution einführen. Es stellt sich heraus, dass das örtliche Auftreten einer solchen Singularität mit der Geschwindigkeit des Abfalls der Fourier Transformaten in Zusammenhang steht.

Auf dieser Basis betrachten wir dann die Präzisierung des Konzeptes des Singulären Trägers im Phasenraum, die Wave Front Set einer Distribution ($\text{WF } u$). Grob gesprochen wird hier jeder Singularität x eine Richtung ξ hinzugefügt, in der diese auftritt, wodurch wir insgesamt Elemente (x, ξ) im Phasenraum erhalten. Wieder werden wir die – diesmal gerichtete – lokale Glattheit einer Distribution an der Abfallgeschwindigkeit ihrer Fourier Transformaten messen. Als Hauptbeispiel werden wir allgemein die Wave Front Set der Klasse der Fourier Integral Operatoren (FIO) lokalisieren und uns speziell den Lösungsoperator der Wellengleichung ansehen.

Schließlich werden wir die Auswirkung der Anwendung eines Ψ DO auf den Singulären Träger und die Wave Front Set einer Distribution, sowie deren Ausbreitung unter einer Differentialgleichung analysieren.

Die Quellen dieses Kapitels sind [StRaym] und [Hörm3]. Die Charakteristikmethode, die wir im letzten Abschnitt verwenden, stammt von [Ev].

Notation

Wir bezeichnen mit $T^*(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ das Tangentenbündel und $T^*(\mathbb{R}^n) \supset S^*(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \times S^{n-1}$ das konormale Sphärenbündel des n -dimensionalen Raumes, wobei hier $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ die $n - 1$ -dimensional Einheitssphäre des \mathbb{R}^n bezeichnet.

3.1 Singular Support

Definition 3.1 (Singular Support)

Ist $X \subset \mathbb{R}^n$ und $u \in \mathcal{D}'(X)$, so ist der Singuläre Träger von u ($\text{sing supp } u$) das Komplement der Menge aller Punkte $x \in X$, für die eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ existiert, sodass $u|_U$ eine C^∞ Funktion ist.

Verwenden wir die Definition von $u|_U \in C^\infty(U)$ aus Abschnitt 1.4, so können wir diese Definition folgendermaßen formal ausschreiben:
 $x \notin \text{sing supp } u$ genau dann, wenn es $U \in \mathcal{U}(x)$ und $\psi \in C^\infty(U)$ gibt, sodass

$$\langle u, \varphi \rangle = \langle \psi, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(U).$$

In Abbildung 3.1 sehen wir den Singulären Träger einer Distribution u veranschaulicht, die wir für die nun kommenden Abschnitte als repräsentatives Beispiel mitnehmen möchten. Sei dazu $X \subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Menge, deren Rand ∂X eine C^2 Kurve ist. Es handelt sich dann bei u um eine Distribution, die auf X durch eine C^∞ Funktion f und auf dem Komplement von X , X^c , durch eine andere C^∞ Funktion g dargestellt werden kann. Wir schreiben salopp $u = f$ (in X) und meinen damit, dass u gleich der von f erzeugten Distribution $\langle f, \cdot \rangle$ ist. Aus dieser Definition geht klar hervor, wo der Singuläre Träger von

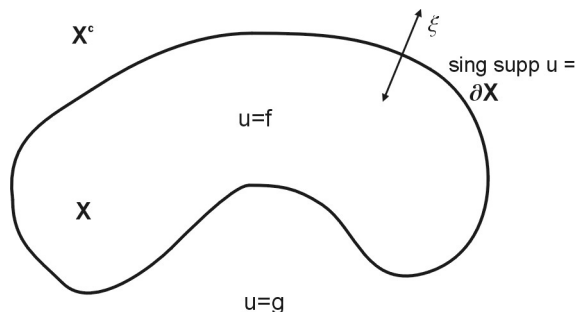


Abbildung 3.1: Singulärer Träger und Wave Front Set

u sein muss. Betrachten wir einen Punkt x im Inneren von X , so existiert eine Umgebung von x auf der $u = f$, also eine C^∞ Funktion ist. Selbiges gilt für $x \in X^c$, wo lokal $u = g$ gilt. Ist x hingegen aus ∂X , so gibt es in jeder Umgebung von x Punkte in X und in X^c , wodurch wir u lokal nicht durch eine C^∞ Funktion darstellen können. Daher ist $\text{sing supp } u = \partial X$.

Der nun folgenden Charakterisierung des Singulären Trägers werden wir im Zusammenhang mit der Wave Front Set wieder begegnen. Dieser nächste Satz ist dazu in Verbindung mit Satz 1.29 zu sehen, der einen Zusammenhang zwischen der Abfallgeschwindigkeit der Fourier Transformation von ϕu und dem Singulären Träger herstellt.

Satz 3.2

$x \notin \text{sing supp } u$ genau dann, wenn ein $U \in \mathcal{U}(x)$ und ein $\phi \in C_0^\infty(U)$ existiert, sodass $\phi u \in C_0^\infty(U)$.

Beweis

Laut Definition ist $x \notin \text{sing supp } u$, wenn es eine Umgebung U von x gibt, sodass u in U eine glatte Funktion ist. Natürlich ist dann auch $\phi u \in C_0^\infty(U)$ für alle $\phi \in C_0^\infty(U)$. Sollte umgekehrt eine Ableitung von u in U eine Unstetigkeitsstelle haben, etwa in $x_0 \in U$, so wählen wir $\phi \in C_0^\infty(U)$, mit $\phi(x_0) \neq 0$ und es hätte dann auch ϕu in x_0 eine Unstetigkeit in einer Ableitung.

q.e.d.

3.2 Wave Front Set

Der Singulärer Träger gibt uns Aufschluss über das lokale Verhalten einer Distribution in der Umgebung eines Punktes. Als nächsten Schritt werden wir nun auch den Frequenzbereich lokalisieren. Dazu verwenden wir die Tatsache, dass eine Distribution in einem Punkt glatt ist, wenn ihre Fourier Transformierte in alle Richtungen schnell abfällt.

Nennen wir den Kegel aller Richtungen, in denen langsamer Abfall vorliegt, Σ , so gibt uns dieser also Aufschluss über die Richtungen in denen Singularitäten einer Distribution auftreten.

Definition 3.3

Sei $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus 0$. Wir sagen, dass $\xi \notin \Sigma(v)$, wenn es ein $V \in \mathcal{U}_k(\xi)$ gibt, sodass zu jedem N ein C_N existiert, sodass

$$|\hat{v}(\eta)| \leq C_N (1 + |\eta|)^{-N}, \quad \forall \eta \in V. \quad (3.1)$$

Dass es sich hierbei tatsächlich um einen Kegel handelt, sehen wir, da die Umgebung V in der Definition als Kegel gewählt wurde. Da V außerdem offen ist, folgt, dass auch das Komplement von $\Sigma(v)$ offen ist und daher ist $\Sigma(v)$ abgeschlossen. Wir können nun den Begriff der Glattheit einer Distribution auf Ort-Frequenz-Tupel (x, ξ) erweitern und wir sprechen dann von Mikrolokaler Glattheit". Hier ist die genaue Definition.

Definition 3.4

$u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ heißt **mikrolokal glatt** in (x, ξ) , wenn es ein $\varphi \in C_0^\infty$ mit $\varphi(x) \neq 0$ gibt, sodass $\xi \notin \Sigma(\varphi u)$.

Um zu zeigen, dass diese Eigenschaft unabhängig von der konkreten Wahl von ϕ ist (solange nur dessen Träger klein genug ist), wollen wir die Definition von Σ auch auf Distributionen, die nicht kompakt getragen sind, ausweiten. Damit dies auf eine konsistente Weise geschehen kann, brauchen wir das folgende Lemma.

Lemma 3.5

Ist $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, so gilt

$$\Sigma(\phi v) \subset \Sigma(v).$$

Beweis

Wir werden statt dessen zeigen dass $\Sigma(v)^c \subset \Sigma(\phi v)^c$. Sei also Γ ein offener Kegel in dem (3.1) für jedes N gilt, Γ_1 ein abgeschlossener Kegel, $\Gamma_1 \subset \Gamma \cup \{0\}$ und sei $0 < \epsilon < 1$ so, dass $\eta \in \Gamma$, immer wenn $\xi \in \Gamma_1$ und $|\xi - \eta| < \epsilon|\xi|$. In Abbildung 3.2

wird veranschaulicht, dass so ein ϵ existiert, falls $|\xi| = 1$, da wir eine Kugel mit Radius ϵ finden können, die ganz in Γ enthalten ist und daraus $\eta \in \Gamma$ folgt. Gilt

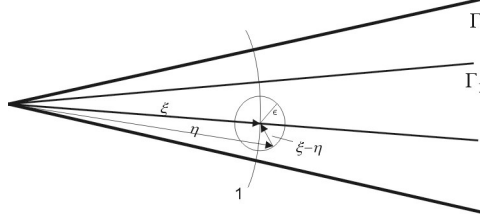


Abbildung 3.2: $\Gamma_1 \subset \Gamma$

die Behauptung nun also für $|\xi| = 1$, so folgt aus $|\xi - \eta| < \epsilon|\xi|$, dass $|\frac{\xi}{|\xi|} - \frac{\eta}{|\eta|}| < \epsilon$ und mit obigem Argument, dass $\frac{\eta}{|\eta|} \in \Gamma$. Da Γ ein Kegel ist, gilt dann aber auch $\eta \in \Gamma$. Unter diesen Voraussetzungen ist außerdem $|\xi| - |\eta| \leq |\xi - \eta| \leq \epsilon|\xi|$, also $|\eta| \geq (1 - \epsilon)|\xi|$.

Um nun eine Aussage über $\widehat{\phi v}$ zu treffen, verwenden wir zuerst Satz 1.38 und unterteilen dann das Integral in die Bereiche $|\eta| < \epsilon|\xi|$ und $|\eta| \geq \epsilon|\xi|$ um folgende Ungleichung zu erhalten:

$$\begin{aligned} (2\pi)^n |\widehat{\phi v}(\xi)| &= \left| \int \hat{\phi}(\eta) \hat{v}(\xi - \eta) d\eta \right| \\ &\leq \sup_{|\eta - \xi| < \epsilon|\xi|} |\hat{v}(\eta)| \|\hat{\phi}\|_1 + \int_{|\eta| \geq \epsilon|\xi|} |\hat{\phi}(\eta)| |\hat{v}(\xi - \eta)| d\eta. \end{aligned}$$

Nach der Bemerkung zu Satz 1.29 gibt es ein $M \geq 0$, sodass

$$|\hat{v}(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^M.$$

In dem Bereich wo $|\eta| \geq \epsilon|\xi|$, gilt $|\xi - \eta| \leq \|\xi\| + |\eta| \leq (1 + c^{-1})|\eta|$ und da natürlich auch $1 < (1 + c^{-1})$, können wir schreiben

$$\begin{aligned} (2\pi)^n |\widehat{\phi v}(\xi)| &\leq \\ &\sup_{|\eta - \xi| < \epsilon|\xi|} |\hat{v}(\eta)| \|\hat{\phi}\|_1 + C \int_{|\eta| \geq \epsilon|\xi|} |\hat{\phi}(\eta)| (1 + c^{-1})^M (1 + |\eta|)^M d\eta. \end{aligned}$$

Aus der Analyse rund um die Situation wie in Abbildung 3.2 erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} \sup_{\Gamma_1} (1 + |\xi|)^N |\widehat{\phi v}(\xi)| &\leq (1 - c)^{-N} \sup_{\Gamma} |\hat{v}(\eta)| (1 + |\eta|)^N \|\hat{\phi}\|_1 \\ &\quad + C(1 + c^{-1})^{N+M} \int_{|\eta| \geq \epsilon|\xi|} |\hat{\phi}(\eta)| (1 + |\eta|)^{N+M} d\eta \leq C_N \end{aligned}$$

da $\hat{\phi}$ in \mathcal{S} ist.

q.e.d.

Ist $X \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in \mathcal{D}'(X)$, so setzen wir für $x \in X$:

$$\Sigma_x(u) := \bigcap_{\substack{\phi \in C_0^\infty(X), \\ \phi(x) \neq 0}} \Sigma(\phi u). \quad (3.2)$$

Lemma 3.6

Ist $u \in \mathcal{D}'(X)$ und $\varphi_k \in C_0^\infty(X)$ eine Funktionenfolge, sodass $\varphi_k(x) \neq 0$ und $\text{supp } \varphi_k \rightarrow x$, dann gilt

$$\Sigma(\varphi_k u) \rightarrow \Sigma_x(u).$$

Beweis

Nach Definition (3.2), gilt $\Sigma_x(u) \subset \Sigma(\varphi u)$, für jedes $\varphi \in C_0^\infty(X)$ mit $\varphi(x) \neq 0$. Wir werden nun zeigen, dass es zu jedem offenen Kegel $V \supset \Sigma_x(u)$ ein $\epsilon > 0$ gibt, sodass

$$\Sigma(\phi u) \subset V \quad \text{für alle } \phi \in C_0^\infty(B_\epsilon(x)), \phi(x) \neq 0.$$

Aus dieser Aussage folgt die Behauptung, indem wir immer kleinere offenen Kegel $V \supset \Sigma_x(u)$ betrachten und so sehen, dass die Folge φ_k irgendwann in den zugehörigen Kugeln mit Radien ϵ getragen ist und daher der Grenzwert in jedem solchen V enthalten sein muss.

Wir benützen die Kompaktheit der Einheitskugel um eine endliche Familie von Funktionen $(\phi_j)_{j=1, \dots, k}$ in $C_0^\infty(X)$ zu finden, sodass $\phi_j(x) \neq 0$ und

$$\bigcap_{j=1}^k \Sigma(\phi_j u) \subset V.$$

Es gibt dann ein $\epsilon > 0$, sodass $B_\epsilon(x) \subset \text{supp } \phi_j$ für alle j und daher gibt es für jedes $\phi \in C_0^\infty(B_\epsilon(x))$, $\phi(x) \neq 0$ ein $\psi \in C_0^\infty(X)$, sodass $\phi = \psi \phi_1 \cdots \phi_k$ und aus Lemma 3.5 folgt dann

$$\Sigma(\phi u) \subset \bigcap_{j=1}^k \Sigma(\phi_j u) \subset V.$$

q.e.d.

Definition 3.7 (WF)

Sei $u \in \mathcal{D}'(X)$. Dann heißt die abgeschlossene Teilmenge von $X \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ definiert durch

$$\text{WF}(u) = \{ (x, \xi) \in X \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) : \xi \in \Sigma_x(u) \} \quad (3.3)$$

die **Wave Front Set** von u .

Aufgrund der vorangegangenen Diskussion ist die Wave Front Set von u ist das Komplement der Menge aller (x, ξ) in denen u mikrolokal glatt ist.

Bevor wir im nächsten Kapitel die Theorie zum Begriff der Wave Front Set vertiefen, präsentieren wir zunächst noch eine alternative Charakterisierung der Wave Front Set unter Verwendung von Symbolen von Pseudo-Differentialoperatoren. Diese wird nützlich werden, wenn wir in Abschnitt 3.5 die Wirkung solcher Operatoren auf die Wave Front Set untersuchen.

Satz 3.8

Sei $u \in \mathcal{S}'$ und $(x, \xi) \in T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$. Es gilt $(x, \xi) \notin \text{WF}(u)$ genau dann, wenn eine kegelförmige Umgebung Γ von (x, ξ) existiert, sodass

$$a(x, D)u \in C^\infty \quad \forall a \in S_{\text{komp}}^\infty(\Gamma).$$

Beweis

Analysieren wir die Definition von $\text{WF} u$ aus (3.3) in Anbetracht von Lemma 3.5, so ist $(x_0, \xi_0) \notin \text{WF} u$, falls es $U \in \mathcal{U}(x_0)$ und $V \in \mathcal{U}_k(\xi_0)$ gibt, sodass $\widehat{\phi u}$ für $\phi \in C_0^\infty(U)$ in V schnell fallend ist. Wählen wir nun ϕ , sodass $\phi = 1$ in einer Umgebung U_1 von x_0 und setzen $\Gamma = U_1 \times V$, so ist dies eine kegelförmige Umgebung von (x_0, ξ_0) . Für ein beliebiges $a \in S_{\text{komp}}^\infty(\Gamma)$ ist dann

$$a(x, D)u = a(x, D)(\phi u) + a(x, D)((1 - \phi)u). \quad (3.4)$$

Für den zweiten Term gilt $a\#(1 - \phi) \in S^{-\infty}$, da die Träger der beiden Terme disjunkt sind und daher alle Terme in der asymptotischen Entwicklung von $\#$ identisch verschwinden. Nach Satz 2.26 ist daher $a(x, D)((1 - \phi)u) \in \mathcal{P} \subset C^\infty$. Der erste Term in der rechten Seite von (3.4) lautet

$$a(x, D)(\phi u) = (2\pi)^{-n} \int_V e^{i\langle x, \xi \rangle} a(x, \xi) \widehat{\phi u}(\xi) d\xi,$$

wobei die Integration durch den Träger von a bezüglich ξ auf V beschränkt ist. Nach Voraussetzung ist aber $\widehat{\phi u}$ in V schnell fallend und daher sind alle Ableitungen von $a(x, D)(\phi u)$ beschränkt, daher stetig ($f' \in L^\infty \implies f \in C^0$) und wir erhalten, dass $a(x, D)u \in C^\infty$.

Für die umgekehrte Implikation wählen wir $\varphi \in C_0^\infty(\Gamma)$, sodass $\varphi(x, \xi) = 1$ in $K_\epsilon := \{(x, \xi) : |x - x_0| + ||\xi| - 1| < \epsilon\}$ und $\psi \in C_0^\infty$, sodass $\psi(\xi) = 1$ in der Nähe von $\xi = 0$. Damit setzen wir

$$a(x, \xi) = (1 - \psi(\xi)) \varphi\left(x, \frac{\xi}{|\xi|}\right) \in S_{\text{komp}}^0(\Gamma)$$

und erhalten für $\phi \in C_0^\infty(B_\epsilon(x_0))$, dass

$$a(x, D)(\phi u) = \int_V e^{i\langle x, \xi \rangle} a(x, \xi) \widehat{\phi u}(\xi) d\xi \in C^\infty,$$

wobei $V := \{\xi : (x, \xi) \in \Gamma \text{ für ein } x\}$. Dies ist nur möglich, wenn $\widehat{\phi u}$ in V schnell fallend ist.

q.e.d.

3.3 Eigenschaften der Wave Front Set

Um die Theorie um die Begriffe des Singular Supports und vor allem der Wave Front Set noch etwas zu verbessern, werden wir einige Sätze sehen, die uns Aufschluss über die konkrete Bedeutung dieser Konzepte geben sollen. Im Anschluss daran werden wir einige repräsentative Beispiele von Distributionen behandeln, für die wir die Wave Front Set bestimmen. Wir beginnen mit einem Satz, der einen Zusammenhang zwischen der Wave Front Set und dem Singulären Träger, indem er uns erlaubt die Projektion der Wave Front Set mancher Distributionen zu lokalisieren.

Satz 3.9

- (i) Ist $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, dann ist $\text{sing supp } u = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists \xi \neq 0 : (x, \xi) \in \text{WF}(u)\}$, die Projektion von $\text{WF } u$ auf die erste Variable.
- (ii) Ist $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, so ist $\Sigma(u) = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \exists x : (x, \xi) \in \text{WF}(u)\}$, die Projektion von $\text{WF } u$ auf die zweite Variable.

Beweis

Ist $x_0 \notin \text{sing supp } u$, so gibt es ein $\phi \in C_0^\infty$, $\phi(x_0) \neq 0$, sodass $\phi u \in C_0^\infty$. Daher ist $\widehat{\phi u}(\xi)$ für alle ξ schnell fallend und $\Sigma_{x_0}(u) = \emptyset$. Also gibt es kein ξ , sodass $(x_0, \xi) \in \text{WF } u$.

Ist $\Sigma_{x_0} = \emptyset$, so folgt aus Lemma 3.6 insbesondere, dass es ein $\phi \in C_0^\infty(X)$ mit $\phi(x_0) \neq 0$ gibt, sodass $\Sigma(\phi u) = \emptyset$. Dies ist aber genau dann der Fall, wenn $\phi u \in C^\infty$.

Bezeichnen wir die Projektion von $\text{WF } u$ auf die zweite Variable mit W , so gilt $W \subset \Sigma(u)$ schon aufgrund der Definition der Wave Front Set. Für die Umgekehrte Inklusion weisen wir darauf hin, dass W eine abgeschlossene Menge ist. In der Tat erhalten wir für $u \in \mathcal{E}'$ die Menge $\{\xi : \xi \in W \text{ und } |\xi| = 1\}$ als Projektion einer kompakten Menge auf $\mathbb{R}^n \times S^{n-1}$, wobei hier $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$. Ist V eine kegelförmige Umgebung von W , so hat jedes $x \in \mathbb{R}^n$ eine Umgebung U_x , sodass

$$\Sigma(\phi u) \subset V \quad \text{für } \phi \in C_0^\infty(U_x).$$

Da wir $u \in \mathcal{E}'$, also kompakt getragen, angenommen haben, können wir $\text{supp } u$ mit einer endlichen Anzahl dieser U_{x_j} überdecken und Funktionen $\phi_j \in C_0^\infty(U_{x_j})$ so wählen, dass $\sum_j \phi_j = 1$ in einer Umgebung von $\text{supp } u$. Damit gilt dann

$$\Sigma(u) = \Sigma\left(\sum_j \phi_j u\right) \subset \bigcup_j \Sigma(\phi_j u) \subset V,$$

woraus die Behauptung folgt.

q.e.d.

Satz 3.10

Sei $X \in \mathbb{R}^n$ offen und S eine geschlossene, kegelförmige Teilmenge von $X \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, dann gibt es $u \in \mathcal{D}'(X)$ mit $\text{WF}(u) = S$.

Beweis

Es genügt die Aussage für $X = \mathbb{R}^n$ zu zeigen, da man diesen Fall ansonsten auf den Abschluss von S in $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus 0)$ anwenden kann.

Wir wählen nun eine Folge $(x_k, \theta_k) \in S$ mit $|\theta_k| = 1$ so, dass jedes $(x, \theta) \in S$ mit $|\theta| = 1$ Grenzwert einer Teilfolge ist. Sie $\phi \in C_0^\infty$ und $\hat{\phi} = 1$. Dann ist

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} \phi(k(x - x_k)) e^{ik^3 \langle x, \theta_k \rangle} \quad (3.5)$$

eine stetige Funktion in \mathbb{R}^n und wir werden zeigen, dass $\text{WF}(u) = S$. Dazu zeigen wir zuerst, dass $\text{WF}(u) \subset S$: Falls $(x_0, \xi_0) \notin S$, so können wir eine offene Umgebung U von x_0 und eine offene, kegelförmige Umgebung V von ξ_0 wählen, sodass

$$(U \times V) \cap S = \emptyset. \quad (3.6)$$

Wir schreiben $u = u_1 + u_2$, wobei u_1 die Summe jener Terme aus (3.5) ist, in denen $x_k \notin U$, und u_2 die Summe jener Terme mit $x_k \in U$ ist. Es ist $u_1 \in C^\infty$ in einer Umgebung U_1 von x_0 , da alle bis auf endliche viele Terme in U_1 verschwinden, wenn $\bar{U}_1 \subset U$. Weiters ist

$$\begin{aligned} \hat{u}_2(\xi) &= \int e^{-i \langle x, \xi \rangle} \sum_{x_k \in U} k^{-2} \phi(k(x - x_k)) e^{ik^3 \langle x, \theta_k \rangle} dx \\ &= \sum_{x_k \in U} k^{-2} \int \phi(k(x - x_k)) e^{i \langle x, k^3 \theta_k - \xi \rangle} dx \\ &= \sum_{x_k \in U} k^{-2} \int \phi(y) e^{i \langle \frac{y}{k} + x_k, k^3 \theta_k - \xi \rangle} k^{-n} dy \\ &= \sum_{x_k \in U} k^{-2-n} \int e^{-i \langle y, \frac{\xi - k^3 \theta_k}{k} \rangle} \phi(y) dy e^{i \langle x_k, k^3 \theta_k - \xi \rangle} \end{aligned}$$

und wir erhalten

$$\hat{u}_2(\xi) = \sum_{x_k \in U} k^{-2-n} \hat{\phi} \left(\frac{\xi - k^3 \theta_k}{k} \right) e^{i \langle x_k, k^3 \theta_k - \xi \rangle} \quad (3.7)$$

Hierbei ist $\theta_k \notin V$ wegen (3.6). Ist nun V_1 eine weitere kegelförmige Umgebung von ξ_0 mit $\bar{V}_1 \subset V \cup 0$, dann ist $|\xi - \eta| \geq c(|\xi| + |\eta|)$ falls $\xi \in V_1$ und $\eta \notin V$ für ein $c > 0$, da dies für $|\xi| + |\eta| = 1$ erfüllt ist. Somit ist

$$|\xi - k^3 \theta_k| \geq c(|\xi| + k^3) \geq c|\xi|^{2/3} k, \quad \xi \in V_1,$$

(allgemein gilt für $a, b > 0$: $a^3 + b^3 = (a+b)(a-b)^2 + a^2b + ab^2 \geq a^2b$) und da $\hat{\phi} \in S$, folgt, dass \hat{u}_2 in V_1 schnell fallend ist. Daher ist (x_0, ξ_0) nicht in $\text{WF}(u)$.

Sei nun $(x_0, \xi_0) \in S$. Wir wählen $\chi \in C_0^\infty$ gleich 1 nahe x_0 . Um zu zeigen, dass $(x_0, \xi_0) \in \text{WF}(u)$, müssen wir zeigen, dass $\widehat{\chi u}$ in einer kegelförmigen Umgebung von ξ_0 nicht schnell fallend sein kann. Dafür stellen wir zuerst fest, dass

$$\chi(x) \phi(k(x - x_k)) = \phi_k(k(x - x_k))$$

wobei $\phi_k(x) = \chi(\frac{x}{k} + x_k) \phi(x)$ zu einer beschränkten Menge in \mathcal{S} gehört. Die Fourier Transformation von χu ist ein Summe von der Art wie (3.7) mit ϕ ersetzt

durch ϕ_k . Ist x_k nahe zu x_0 und k groß, dann ist $\phi_k = \phi$ und wir erhalten für beliebiges N

$$|\widehat{\chi u}(k^3\theta_k)| \geq k^{-n-2} - C_N \sum_{j \neq k} j^{-n-2} \left(\frac{|k^3\theta_k - j^3\theta_j|}{j} \right)^{-N}.$$

Hierbei ist

$$|k^3\theta_k - j^3\theta_j| \geq |k^3 - j^3| \geq k^2 + kj + j^2 \geq kj \quad \text{für } k \neq j$$

und somit ist die Summe $\mathcal{O}(k^{-N})$. Wählen wir $N > n + 2$, so erhalten wir für große k , dass

$$|\widehat{\chi u}(k^3\theta_k)| \geq k^{-n-2}/2$$

wenn x_k nahe bei x_0 ist. Da $(x_0, \frac{\theta_0}{|\theta_0|})$ ein Grenzwert der Folge (x_k, θ_k) ist, folgt dass $\widehat{\chi u}$ in einer kegelförmigen Umgebung von ξ_0 nicht schnell fallend sein kann.

q.e.d.

Satz 3.11

Sei V ein linearer Unterraum des \mathbb{R}^n und $u = u_0 dS$, wobei $u_0 \in C^\infty(V)$ und dS das euklidische Oberflächenmaß ist. Dann ist

$$\text{WF}(u) = \text{supp } u \times (V^\perp \setminus 0)$$

Beweis

Ist $\chi \in C_0^\infty$, so gilt nach der Voraussetzung an u

$$\widehat{\chi u}(\xi) = \int_V e^{-i\langle x, \xi \rangle} \chi(x) u_0(x) dS(x).$$

Schreiben wir $\xi = \xi' + \xi''$, wobei $\xi' \in V$ und $\xi'' \in V^\perp$, so ist dies eine schnell fallende Funktion in ξ' , die auf keiner offenen Menge identisch gleich Null ist, außer $\chi u = 0$. Somit ist $\widehat{\chi u}$ in keinem offenen Kegel der V^\perp schneidet schnell fallend, wenn dort nicht $\chi u = 0$ gilt, aber wir erhalten schnellen Abfall in jedem Kegel in dem $|\xi| \leq C|\xi'|$.

q.e.d.

Satz 3.12

Falls $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ in $\mathbb{R}^n \setminus 0$ homogen ist, dann gilt

$$(x, \xi) \in \text{WF}(u) \quad \Leftrightarrow \quad (\xi, -x) \in \text{WF}(\hat{u}) \quad \text{falls } \xi \neq 0 \wedge x \neq 0 \quad (3.8)$$

Beweis

Nehmen wir zuerst an, dass u in ganz \mathbb{R}^n homogen vom Grad a ist, also $u(tx) = t^a u(x) \quad \forall t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$. Um (3.8) zu beweisen, genügt es zu zeigen, dass für $x_0 \neq 0, \xi_0 \neq 0$

$$(x_0, \xi_0) \notin \text{WF}(u) \implies (\xi_0, -x_0) \notin \text{WF}(\hat{u}), \quad (3.9)$$

da \hat{u} wiederum homogen ist (vgl. Satz 1.31) und (3.9) angewandt auf \hat{u} die umgekehrte Implikation liefert: Ist $(\xi_0, -x_0) \notin \text{WF}(\hat{u})$ so erhalten wir aus (3.9), dass $(-x_0, -\xi_0) \notin \text{WF}(\hat{\hat{u}}) = \text{WF}(\tilde{u})$ und es folgt $(x_0, \xi_0) \notin \text{WF}(u)$.

Sei also $(x_0, \xi_0) \notin \text{WF}(u)$, dann gibt es $U \in \mathcal{U}(x_0), V \in \mathcal{U}(\xi_0)$ sodass

$$(U \times V) \cap \text{WF}(u) = \emptyset. \quad (3.10)$$

Wir wählen $\psi \in C_0^\infty(U), \chi \in C_0^\infty(V)$ mit $\psi \equiv 1$ in einer Umgebung von x_0 und $\chi \equiv 1$ in einer Umgebung von ξ_0 . Um zu zeigen, dass $(\xi_0, -x_0) \notin \text{WF}(\hat{u})$ müssen wir die Fourier Transformierte von $v = \chi \hat{u}$ in einer kegelförmigen Umgebung von $-x_0$ abschätzen. Sei $r > 0$ so klein, dass $\psi(x) = 1$ für $|x - x_0| < 2r, |x - x_0| < r$ und t groß, dann ist

$$\begin{aligned} \hat{v}(-tx) &= \widehat{\chi \hat{u}}(-tx) = (2\pi)^{-n} \hat{\chi} * \hat{\hat{u}}(-tx) = \hat{\chi} * \tilde{u}(-tx) \\ &= \int \hat{\chi}(-tx - z) \tilde{u}(z) dz = \int \hat{\chi}(-tx + z) u(z) dz \\ &= \int t^{a+n} \hat{\chi}(t(y-x)) u(y) dy = t^{a+n} \langle u, \hat{\chi}(t(\cdot - x)) \rangle \end{aligned}$$

Wir setzen nun $u_0 = \psi u$ und $u_1 = (1 - \psi)u$. Dann ist $\Sigma(u_0) \cap \text{supp } \chi = \emptyset$ wegen Satz 3.9 und (3.10) und daher

$$\begin{aligned} \langle u_0, \hat{\chi}(t(\cdot - x)) \rangle &= \int \hat{\chi}(t(z-x)) u_0(z) dz \\ &= \iint e^{-i\langle t(z-x), \xi \rangle} \chi(\xi) u_0(z) d\xi dz \\ &= \iint e^{-i\langle z-x, t\xi \rangle} u_0(z) dz \chi(\xi) d\xi \\ &= \int \hat{u}_0(t\xi) \chi(\xi) e^{i\langle x, t\xi \rangle} d\xi \end{aligned}$$

und somit schnell fallend für $t \rightarrow \infty$, da $t^N \hat{u}_0(t\xi) \chi(\xi)$ für jedes N beschränkt ist. Weiters ist

$$\langle u_1, \hat{\chi}(t(\cdot - x)) \rangle = \langle u, (1 - \psi) \hat{\chi}(t(\cdot - x)) \rangle$$

ebenfalls schnell fallend, da

$$y \rightarrow t^N (1 - \psi(y)) \hat{\chi}(t(y-x))$$

für jedes N in \mathcal{S} beschränkt ist. Es gilt sogar $|x - x_0| < r$ nach Voraussetzung und $|y - x_0| > 2r$ in $\text{supp}(1 - \psi(y))$, wodurch $t \leq t \frac{|y-x|}{r}$ und $|y| \leq |y-x| + |x_0| + r$. Da $\hat{\chi} \in \mathcal{S}$ haben wir (3.9) gezeigt.

Für den allgemeinen Fall verwenden wir, dass u eine Darstellung hat, als

$$u = w + w_0 + q(D)w_1,$$

wobei w homogen, $\text{supp } w_0 \subset \{0\}$, $w_1(x) = |x|^{-n}/c_n$ falls $x \neq 0$ so, dass $\hat{w}_1(\xi) = -\log |\xi|$ und $q(\xi)$ ein Polynom ist. Der Beweis dieser Aussage verlangt ein viel breiteres Wissen über homogene Distributionen und deren Fortsetzungen, als es für uns in dieser Arbeit relevant ist und wir verweisen daher für Details auf [Hörm3].

Mit dieser Darstellung folgt, dass $u - w$ und $\hat{u} - \hat{w}$ abseits des Ursprungs in C^∞ sind und daraus folgt die Aussage.

q.e.d.

3.4 Die Wave Front Set von FIO

Als nächste Klasse von Funktionen, für die wir die Wave Front Set bestimmen möchten, stellen wir die Klasse der Fourier Integraloperatoren (kurz FIO) vor, die eine Verallgemeinerung der Klasse der Ψ DO darstellt. Dazu werden wir auf die Definition von oszillatorischen Integralen aus Abschnitt 2.2 zurückgreifen. Vorerst brauchen wir aber die folgende

Definition 3.13

Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen und Γ ein offener Kegel in $X \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

Wir sagen, dass eine Funktion $\phi \in C^\infty(\Gamma)$ eine *Phasen Funktion* in Γ ist, wenn

- (i) $\phi(x, t\theta) = t \phi(x, \theta)$ if $(x, \theta) \in \Gamma, t > 0$
- (ii) $\text{Im } \phi \geq 0$ in Γ
- (iii) $d\phi \neq 0$ in Γ

Lemma 3.14

Sei ϕ eine Phasen Funktion in Γ . Dann ist falls $\phi'_\theta(x, \theta) = 0$, auch $\phi(x, \theta) = 0$.

Beweis

Wir zeigen die Negation der Aussage. Ist also $\phi(x, \theta) = C \neq 0$, so folgt aus der Definition einer Phasen Funktion $\phi(x, t\theta) = t \cdot C$. Dann ist - für $t \in (1 - \epsilon, 1 + \epsilon)$ - $\phi(x, t\theta)$ streng monoton steigend (falls $C > 0$) oder fallend (falls $C < 0$), wodurch $\phi'_\theta(x, \theta) \neq 0$.

q.e.d.

Wir erweitern nun den in Abschnitt 2.2 eingeführten Begriff eines oszillatorischen Integrals für Fälle, in denen beim trigonometrischen Anteil des Integranden eine Phase ϕ im Exponenten steht. Dazu erinnern wir daran, dass wir in Beispiel 2.5 gesehen haben, dass $a \in S^m$ insbesondere bedeutet, dass $a \in A^{|m|}$. Die Konvergenzanalyse verläuft weitgehend analog zu dem hier behandelten Fall. An die Stelle von Lemma 2.7 tritt dabei das nun folgende Lemma 3.15. Da der Beweis jedoch zu weit vom Thema wegführt, verweisen wir den interessierten Leser auf [Hörm3, Theorem 7.7.1]

Lemma 3.15

Sei $K \subset \mathbb{R}^{2n}$ eine kompakte Menge und $\gamma \supset K$ ein offener Kegel. Ist $k \in \mathbb{Z}_+$, sowie $u \in C_0^k(K)$ und ϕ eine Phase auf Γ , dann gilt für alle $\omega > 0$

$$\omega^k \left| \int e^{i\omega\phi(x,\theta)} u(x,\theta) dx d\theta \right| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup |D^\alpha u| (|\phi'|^2 + \text{Im } \phi)^{|\alpha|/2-k}.$$

Damit sind wir nun in der Lage die Klasse der FIO zu definieren.

Definition 3.16 (FIO)

Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen und ϕ eine Phase auf dem offenen Kegel $\Gamma \subset X \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, sowie $F \subset \Gamma \cup (X \times \{0\})$ ein abgeschlossener Kegel und $a \in S_{\text{komp}}^m(F)$. Dann definiert der stetige, lineare Operator

$$A : u \mapsto \int e^{i\phi(x,\theta)} a(x,\theta) u(x) dx d\theta \quad (3.11)$$

für $u \in C_0^\infty(X)$ eine Distribution. Wir schreiben wie gewohnt $A(u) = \langle A, u \rangle$, wobei

$$A = \int e^{i\phi(\cdot,\theta)} a(\cdot,\theta) d\theta.$$

Satz 3.17

Sei A ein FIO wie in Definition 3.16, dann gilt

$$\text{WF}(A) \subset \{(x, \phi'_x(x, \theta)) : (x, \theta) \in F \wedge \phi'_\theta(x, \theta) = 0\} \quad (3.12)$$

Beweis

Für (x, θ) wie in der rechten Seite von (3.12) gilt zusätzlich nach Satz 3.14, dass $\text{Im } \phi(x, \theta) = 0$ und da ϕ eine Phase ist, erhalten wir mit der Taylor'schen Formel:

$$0 \leq \text{Im } \phi(y, t) = \text{Im } \phi(x, \theta) + \text{Im } \phi'_x(x, \theta) (x - y) + \text{Im } \phi'_\theta(x, \theta) (\theta - t) + R_2(\text{Im } \phi),$$

wobei R_2 das Restglied der Taylorentwicklung vom Grad ≥ 2 bezeichnet. Diese Ungleichung kann aber nur für alle $y \in \mathbb{R}^n$ gelten, wenn $\text{Im } \phi'_x(x, \theta) = 0$. Das heißt also, dass $\phi'_x(x, \theta)$ in (3.12) reellwertig ist.

Sei nun $\psi \in C_0^\infty(X)$. Die Definition von A bedeutet, dass

$$\begin{aligned} \widehat{\psi A}(\xi) &= \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} \psi(x) \int e^{i\phi(x, \theta)} a(x, \theta) d\theta dx \\ &= \iint e^{i(\phi(x, \theta) - \langle x, \xi \rangle)} \psi(x) a(x, \theta) dx d\theta \end{aligned}$$

als oszillatorisches Integral. Zu zeigen ist, dass diese Funktion in jedem abgeschlossenen Kegel $V \in \mathbb{R}^n$, der

$$\{\phi'_x(x, \theta) : (x, \theta) \in F, x \in \text{supp } \psi, \phi'_\theta(x, \theta) = 0\}$$

nicht schneidet, schnell fallend ist. Es gilt dann für ein $c > 0$:
Falls $(x, \theta) \in F$, $x \in \text{supp } \psi$, $\xi \in V$, dann ist

$$|\xi - \phi'_x(x, \theta)| + |\theta| |\phi'_\theta(x, \theta)| \geq c(|\xi| + |\theta|). \quad (3.13)$$

Um dies zu zeigen, bemerken wir zuerst, dass $\phi'_x(x, \theta)$ und $|\theta| \phi'_\theta(x, \theta)$ in F stetig sind, mit dem Wert 0, falls $\theta = 0$. Aufgrund der Homogenität genügt es die Aussage für $|\xi| + |\theta| = 1$ zu zeigen. Wegen der Kompaktheit bleibt nur zu zeigen, dass die linke Seite nie 0 wird, wenn $(x, \theta) \in F$, $x \in \text{supp } \psi$, $\xi \in V$. Ist $\theta = 0$, so auch $|\phi'_x(x, \theta)| = 0$ und es gilt $|\xi - \phi'_x(x, \theta)| = 1$. Falls $\theta \neq 0$, $\phi'_\theta(x, \theta) = 0$, so gilt $\xi \neq \phi'_x(x, \theta)$, da $\xi \in V$, was (3.13) beweist.

Wir wählen nun $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ so, dass $\chi(\theta) = 1$, falls $|\theta| < 1$ und $\chi(\theta) = 0$, falls $|\theta| > 2$, und setzen $\chi_0(\theta) = \chi(\theta)$, sowie

$$\chi_v(\theta) = \chi(2^{-v}\theta) - \chi(2^{1-v}\theta), \quad v > 0.$$

Wir erhalten dadurch ein Partition der Eins, da gilt

$$\begin{aligned} \sum_{v=0}^{\infty} \chi_v(\theta) &= \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^M \chi_v(\theta) \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \chi(\theta) + \sum_{v=1}^M \chi(2^{-v}\theta) - \chi(2^{1-v}\theta) \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^M \chi(2^{-v}\theta) - \sum_{w=0}^{M-1} \chi(2^{-w}\theta) \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \chi(2^{-M}\theta) = \chi(0) = 1 \end{aligned}$$

mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass

$$2^{v-1} \leq |\theta| \leq 2^{v+1}, \quad \text{für } \theta \in \text{supp } \chi_v, \quad v \neq 0.$$

Drücken wir nun das oszillatorische Integral mit Hilfe dieser Partition der Eins aus, so erhalten wir

$$\widehat{\psi A}(\xi) = \sum_{v=0}^{\infty} \iint e^{i(\phi(x, \theta) - \langle x, \xi \rangle)} \psi(x) \chi_v(\theta) a(x, \theta) dx d\theta.$$

Jeder dieser Terme ist in \mathcal{S} . Sei $R = 2^{v-1}$, dann können die Terme mit $v \neq 0$, durch eine Variablentransformation $\theta = R\theta$, geschrieben werden als

$$R^n \iint e^{i(R\phi(x, \theta) - \langle x, \xi \rangle)} \psi(x) \chi_1(\theta) a(x, R\theta) dx d\theta, \quad (3.14)$$

da $\chi_v(R\theta) = \chi(2^{-v}2^{v-1}\theta) - \chi(2^{1-v}2^{v-1}\theta) = \chi_1(\theta)$.

Mit $\Phi(x, \theta) := (R\phi(x, \theta) - \langle x, \xi \rangle)/(R + |\xi|)$ und $\xi \in V$ folgt aus (3.13) innerhalb des Trägers von $\psi(x)\chi_1(\theta)a(x, R\theta)$:

$$|\Phi'_x| + |\Phi'_\theta| \geq c(R|\theta| + |\xi|)/(R + |\xi|) \geq c.$$

Wir erhalten

$$|D_\theta^\alpha D_x^\beta \psi(x)\chi_1(\theta)a(x, R\theta)| \leq C_{\alpha, \beta} R^m.$$

Nun erhalten wir für (3.14), unter Verwendung von Lemma 3.15 mit $\omega = R + |\xi|$, und für $k > m + N + 1$ gilt außerdem die Abschätzung

$$C_k R^{m+n} (R + |\xi|)^{-k} \leq C_k R^{-1} (R + |\xi|)^{m+n+1-k} \leq C_k R^{-1} |\xi|^{m+n+1-k} \quad \text{für } \xi \in V.$$

Da $\sum_{v=1}^{\infty} 2^{1-v} = 2$ schließen wir, dass $\widehat{\psi A}(\xi)$ in V schnell fallend ist.

q.e.d.

Das Standardbeispiel in diesem Zusammenhang ist jener FIO, der die Lösung des Cauchy Problems darstellt. Wir wollen uns die Bedeutung des letzten Satzes anhand dieses Beispiels nochmals ansehen.

Beispiel 3.18

Die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} c^{-2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}(x, t) - \Delta E(x, t) &= 0 \quad \text{für } (x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \\ E(x, 0) &= 0 \\ \frac{\partial E}{\partial t}(x, 0) &= \delta_0(x) \end{aligned}$$

ist gegeben durch den Fourier-Integraloperator

$$E(x, t) = (2\pi)^{-n} \int (e^{i(ct|\xi| + \langle x, \xi \rangle)} - e^{i(-ct|\xi| + \langle x, \xi \rangle)}) \frac{d\xi}{2ic|\xi|}.$$

Beweis

Der erste Schritt in diesem Beweis besteht darin, die gegebene partielle Differentialgleichung in $n + 1$ Variablen in eine gewöhnliche Differentialgleichung in t umzuwandeln. Dies geschieht mittels Fouriertransformation des Problems bezüglich x . Wir erhalten

$$c^{-2} \frac{\partial^2 \hat{E}}{\partial t^2}(\xi, t) + |\xi|^2 \hat{E}(\xi, t) = 0 \quad (3.15a)$$

$$\hat{E}(\xi, 0) = 0, \quad \frac{\partial \hat{E}}{\partial t}(\xi, 0) = 1, \quad (3.15b)$$

da nach Satz 1.25(ii) $(\sum \partial_{x_j}^2 E)(\xi) = -|\xi|^2 \hat{E}(\xi)$ und für die Delta Distribution gilt, dass $\hat{\delta}_0(\xi) = \int e^{i\langle x, \xi \rangle} \delta_0(x) dx = e^0 = 1$. Die Differentialgleichung (3.15a) ist äquivalent zu

$$\frac{\partial^2 \hat{E}}{\partial t^2}(\xi, t) = -(c|\xi|)^2 \hat{E}(\xi, t)$$

und hat die allgemeine Lösung

$$\hat{E}(\xi, t) = A(\xi) e^{itc|\xi|} + B(\xi) e^{-itc|\xi|}.$$

Einsetzen in die Anfangswertbedingungen liefert

$$\begin{aligned} 0 &= \hat{E}(\xi, 0) = A(\xi) + B(\xi) \\ 1 &= \frac{\partial \hat{E}}{\partial t}(\xi, 0) = ic|\xi|A(\xi) - ic|\xi|B(\xi) \end{aligned}$$

und wir erhalten $-B(\xi) = A(\xi) = \frac{1}{2ic|\xi|}$. Für das Transformierte Problem ergibt sich $\hat{E}(\xi, t) = \frac{1}{2ic|\xi|}(e^{itc|\xi|} - e^{-itc|\xi|})$ und nach Anwendung der inversen Fourier Transformation erhalten wir als Lösung des Cauchy Problems

$$E(x, t) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} (e^{itc|\xi|} - e^{-itc|\xi|}) \frac{d\xi}{2ic|\xi|}$$

q.e.d.

Wir erhalten also als Lösung die Differenz zweier oszillatorischer Integrale mit Phasen $\phi(x, t, \xi) = \langle x, \xi \rangle \pm ct|\xi|$. Aus Satz 3.17 folgt, dass wir aus den Gradienten von ϕ bezüglich (x, t) und ξ eine Lokalisierung der Wave Front Set von E bekommen. Diese sind gegeben durch

$$\phi'_x(x, t, \xi) = \xi \quad \text{und} \quad \phi'_t(x, t, \xi) = \pm c|\xi| \quad \text{und} \quad \phi'_\xi(x, t, \xi) = x \pm \frac{tc}{|\xi|}\xi.$$

und wir erhalten

$$\text{WF}(E) \subset \{((x, t), (\xi, c|\xi|)) : x \pm \frac{tc}{|\xi|}\xi = 0\}.$$

Somit ist $(x, t) \in \text{sing supp } E$ nur möglich, wenn ein $\xi \neq 0$ existiert, sodass $x = \pm tc\xi/|\xi|$. Dies ist aber immer der Fall, wenn $|x| = c|t|$, oder formal hingeschrieben

$$\text{sing supp } E \subset \{(x, t) : |x| = c|t|\}$$

3.5 Wirkung von Ψ DO

Als Abschluss dieses Kapitels, wollen wir uns damit befassen, wie die Anwendung eines Ψ DO das mikrolokale Verhalten einer Distribution beeinflusst. Die folgenden Resultate sind für die Entwicklung und Kombination dieser Theorien entscheidend.

Satz 3.19

Jeder Pseudo-Differentialoperator $a(x, D) \in \Psi^\infty$ ist **pseudo-lokal**, das heißt:

$$\text{sing supp } (a(x, D)u) \subset \text{sing supp } u \quad \forall u \in \mathcal{S}'.$$

Außerdem gilt $\text{sing supp } (a(x, D)u) = \text{sing supp } u$ im Fall von elliptischen Operatoren a .

Beweis

Setzen wir $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \text{sing supp } u$, so gilt für alle $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\psi u \in C_0^\infty$ und wir wählen zu jedem $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ ein $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, mit $\psi = 1$ in einer Umgebung von $\text{supp } \varphi$ und können schreiben

$$\varphi a(x, D)u = \varphi a(x, D)(\psi u) + \varphi a(x, D)((1 - \psi)u).$$

Unter Verwendung der Aussagen von Lemma 2.26 ist dann der erste Term in \mathcal{S} , da $\psi u \in C_0^\infty \subset \mathcal{S}$. Der zweite Term ist von der Gestalt $b(x, D)u$, wobei $b = \varphi a \# (1 - \psi) \in S^{-\infty}$, da φa und $1 - \psi$ disjunkten Träger haben und daher alle Terme in der asymptotischen Entwicklung der Verknüpfung $\#$ identisch verschwinden. Daher ist $a(x, D)u$ in Ω glatt und es folgt $\text{sing supp } (a(x, D)u) \subset \text{sing supp } u$.

Ist a elliptisch, so existiert ein $b \in S^\infty$ und ein $r \in S^{-\infty}$, sodass $b \# a - 1 = r$. Daher gilt $u = b \# a(x, D)u - r(x, D)u$, wobei nach Lemma 2.26 $r(x, D)u \in \mathcal{P} \subset C^\infty$. Also ist $\text{sing supp } u = \text{sing supp } (b \# a(x, D)u) \subset \text{sing supp } (a(x, D)u)$, woraus die Behauptung folgt.

q.e.d.**Satz 3.20**

Jeder Pseudo-Differentialoperator $a(x, D) \in \Psi^\infty$ ist **mikro-lokal**, das heißt:

$$\text{WF}(a(x, D)u) \subset \text{WF}(u) \subset \text{WF}(a(x, D)u) \cup \text{Char}(a) \quad \forall u \in \mathcal{S}'.$$

Beweis

Nehmen wir an, dass $(x_0, \xi_0) \notin \text{WF } u \cup \text{Char}(a)$, dann gibt es eine kegelförmige Umgebung Γ von (x_0, ξ_0) , sodass für ein $b \in S^\infty$ und alle $c \in S_{\text{komp}}^\infty(\Gamma)$ gilt

$$c \# a(x, D)u \in C^\infty \quad \text{und} \quad b \# a - 1 \in S_{\text{lok}}^{-\infty}(\Gamma).$$

Für jedes $d \in S_{\text{komp}}^\infty(\Gamma)$ erhalten wir dann $d \# (1 - b \# a) \in S^{-\infty}$ und wir können $d \# b$ darstellen als $d \# b = c + r$ mit $c \in S_{\text{komp}}^\infty(\Gamma)$ und $r \in S^{-\infty}$, wodurch wir erhalten

$$d(x, D)u = d \# (1 - b \# a)(x, D)u + c \# a(x, D)u + r \# a(x, D)u.$$

Der erste und letzte Term dieser Darstellung sind nach Lemma 2.26 in \mathcal{P} , da die Operatoren in $\Psi^{-\infty}$ sind. Der mittlere Term ist nach Voraussetzung in C^∞ , sodass $d(x, D)u \in C^\infty$.

Ist nun $(x_0, \xi_0) \notin \text{WF } u$, so ist – für eine kegelförmige Umgebung Γ von (x_0, ξ_0) und alle $b \in S_{\text{komp}}^\infty(\Gamma)$ – $b(x, D)u \in C^\infty$. Wir können dann für jedes $c \in S_{\text{komp}}^\infty(\Gamma)$ schreiben $c \# a = b + r$, für ein $b \in S_{\text{komp}}^\infty(\Gamma)$ und ein $r \in S^{-\infty}$. Dann ist $c \# a(x, D)u = b(x, D)u + r(x, D)u$, wobei die beiden Terme glatt sind, da $r \in S^{-\infty}$ und $b(x, D)u$ nach Voraussetzung in C^∞ liegt.

q.e.d.

Bemerkung

Per Definition ist ein Punkt (x, ξ) genau dann nicht-charakteristisch für ein Symbol a , wenn a in (x, ξ) elliptisch ist. Daher ist für ein elliptisches Symbol a , die Menge der Charakteristischen Punkte gleich der leeren Menge. Aus Satz 3.20 folgt dann, dass $\text{WF}(a(x, D)u) = \text{WF } u$.

Definition 3.21 (Bicharakteristiken)

Sei $p \in C^\infty(T^*\mathbb{R}^n)$ eine reell-wertige Funktion. Jene Kurven $\gamma(t) = (x(t), \xi(t))$, die den Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{dt} = \partial_\xi p(x, \xi) \quad \frac{d\xi}{dt} = -\partial_x p(x, \xi) \quad (3.16)$$

genügen und die in einem Punkt beginnen, in dem p verschwindet, heißen *Bicharakteristische Kurven* von p .

Bemerkungen

- (i) Definieren wir das Hamilton Vektorfeld von p durch

$$H_p = \langle \partial_\xi p, \partial_x \rangle - \langle \partial_x p, \partial_\xi \rangle, \quad (3.17)$$

so handelt es sich dabei um einen Differentialoperator erster Ordnung. Das Problem $H_p u = 0$ ist von der Form $H_p(v_x, v_\xi, z, x, \xi) = 0$, wobei

$$H_p(v_x, v_\xi, z, x, \xi) = \langle \partial_\xi p(x, \xi), v_x \rangle - \langle \partial_x p(x, \xi), v_\xi \rangle.$$

Darin repräsentiert die z Variable die Lösung u und die v Variablen die entsprechenden Ableitungen von u nach x , bzw. ξ . Dann entsprechen die definitorischen Gleichungen der Charakteristischen Kurven von H_p

$$\frac{dx}{dt} = \partial_{v_x} H_p = \partial_\xi p(x, \xi) \quad \text{und} \quad \frac{d\xi}{dt} = \partial_{v_\xi} H_p = -\partial_x p(x, \xi)$$

den Gleichungen in (3.16). Die Bicharakteristischen Kurven eines Symbols p sind also genau jene Charakteristischen Kurven des Hamilton Vektorfelds H_p , die im Anfangspunkt verschwinden.

- (ii) Ist $\gamma(t) = (x(t), \xi(t))$ eine Lösung von (3.16), so gilt

$$\frac{d}{dt} p(\gamma(t)) = \partial_x p \frac{dx}{dt} + \partial_\xi p \frac{d\xi}{dt} = \partial_x p \partial_\xi p - \partial_\xi p \partial_x p = 0$$

für alle $t > 0$. Daher ist p auf γ konstant, $p(x(t), \xi(t)) = p(x_0, \xi_0)$, oder anders formuliert ist γ in einer Niveaumenge von p enthalten. Insbesondere ist p entlang einer Bicharakteristik identisch gleich Null.

Satz 3.22

Sind $p, q \in C^\infty(T^*\mathbb{R}^n)$ reell-wertige Funktionen und gilt in einem Punkt (x_0, ξ_0)

$$p(x_0, \xi_0) = 0 \quad \text{und} \quad q(x_0, \xi_0) \neq 0,$$

so sind die bicharakteristischen Kurven von p und pq nahe (x_0, ξ_0) lokal ident, allerdings unterschiedlich parametrisiert.

Beweisskizze

Aufgrund von Bemerkung 2 zu Definition 3.21 sind die Bicharakteristiken von p und pq in der Menge $\{(x, \xi) : p(x, \xi) = 0\}$ enthalten. Auf dieser Menge gilt

$$H_{pq} = \langle q \partial_\xi p, \partial_x \rangle - \langle q \partial_x p, \partial_\xi \rangle = q H_p.$$

Daher hat das Hamilton Vektor Feld von pq - bis auf eine Umparametrisierung - lokal die gleichen Integralkurven wie das Feld von p und die beiden Funktionen haben, ebenfalls lokal, die gleichen Bicharakteristischen Kurven.

q.e.d.**Lemma 3.23**

Sei $b \in S^1$ so, dass $b - b^* \in S^0$, sei $s > 0$ und $I = [-s, s]$. Dann gibt es für jedes $k \in \mathbb{Z}$ eine Konstante μ abhängig von k , sodass für alle $w \in C^0(I; H^{k+1}) \cap C^1(I; H^k)$

$$\sup_{t \in I} \|e^{\mu t} w(t)\|_{(k)} \leq \|e^{\mu s} w(s)\|_{(k)} + 2 \int_I \|e^{\mu t} (\partial_t - ib(x, D))w(t)\|_{(k)} dt,$$

und

$$\sup_{t \in I} \|e^{-\mu t} w(t)\|_{(k)} \leq \|e^{\mu s} w(-s)\|_{(k)} + 2 \int_I \|e^{-\mu t} (\partial_t - ib^*(x, D))w(t)\|_{(k)} dt$$

gilt. Außerdem hat - für jedes $g \in C^0(I; \mathcal{S})$ und jedes $\chi \in \mathcal{S}$ - das Cauchy Problem

$$\begin{aligned} (\partial_t - ib(x, D))w(t) &= g(t) \\ w(s) &= \chi \end{aligned} \tag{3.18}$$

genau eine Lösung $w \in \bigcup_k C^0(I; H^k)$ und diese Lösung erfüllt $w \in \bigcap_k C^0(I; H^k)$.

Beweis

Da $b - b^* \in S^0$, haben wir für jedes $w \in C^0(I; H^1)$

$$\begin{aligned} |2 \operatorname{Re} \langle e^{\mu t} ib(x, D)w(t), e^{\mu t} w(t) \rangle| &= |\langle i(b - b^*)(x, D)e^{\mu t} w(t), e^{\mu t} w(t) \rangle| \\ &\leq C \|e^{\mu t} w(t)\|_{(0)}^2 \end{aligned}$$

Wählen wir $\mu \geq C/2$, so können wir für $w \in C^0(I; H^1) \cap C^1(I; H^0)$ schreiben

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|e^{\mu t} w(t)\|_{(0)}^2 &= 2\mu \|e^{\mu t} w(t)\|_{(0)}^2 + 2 \operatorname{Re} \langle e^{\mu t} \partial_t w(t), e^{\mu t} w(t) \rangle \\ &\geq (2\mu - C) \|e^{\mu t} w(t)\|_{(0)}^2 + 2 \operatorname{Re} \langle e^{\mu t} (\partial_t - ib(x, D))w(t), e^{\mu t} w(t) \rangle \\ &\geq -2 \|e^{\mu t} (\partial_t - ib(x, D))w(t)\|_{(0)} \|e^{\mu t} w(t)\|_{(0)} \end{aligned}$$

Wir verwenden nun die Notation $W(t) = \|e^{\mu t} w(t)\|_{(0)}$, $M = \sup_{t \in I} W(t)$ und $A = \int_I \|e^{\mu t} (\partial_t - ib(x, D))w(t)\|_{(0)} dt$. Integrieren wir diese Abschätzung über dem Intervall $[t, s]$ und nehmen dann das Supremum über alle $t \in I$, so erhalten

wir die erste Energieabschätzung für $k = 0$. In der Tat ist dann $M^2 \leq W(s)^2 + 2MA$, sodass $(M - A)^2 \leq W(s)^2 + A^2$ und schließlich $M - A \leq W(s) + A$.

Für $k \neq 0$ haben wir dann

$$(\partial_t - i(\lambda^k \# b \# \lambda^{-k})(x, D))\lambda^k(D)w(t) = \lambda^k(D)(\partial_t - ib(x, D))w(t),$$

und da für $b_k := \lambda^k \# b \# \lambda^{-k} \in S^1$ wieder gilt $b_k - b_k^* \in S^0$ können wir das vorige Resultat verwenden, wobei μ diesmal von k abhängt, um zu erhalten

$$\begin{aligned} \sup_{t \in I} \|e^{\mu t} \lambda^k(D)w(t)\|_{(0)} &\leq \|e^{\mu s} \lambda^k(D)w(s)\|_{(0)} \\ &\quad + 2 \int_I \|e^{\mu t} \lambda^k(D)(\partial_t - ib(x, D))w(t)\|_{(0)} dt, \end{aligned}$$

was – aufgrund der Definition der Sobolevraum-Normen – genau unserer ersten Energieabschätzung entspricht.

Die zweite Abschätzung in $w(-s)$ und b^* kann auf die gleiche Weise hergeleitet werden, wenn wir t durch $-t$ ersetzen, da auch $b^* - (b^*)^* \in S^0$.

Die Eindeutigkeit der Lösung des Cauchy Problems erhalten wir als Konsequenz der Energieabschätzungen. Hätten wir zwei solche Lösungen in $\bigcup_k C^0(I; H^k)$ für die gleichen Daten g und χ , dann wäre deren Differenz $w(t) \in C^0(I; H^{k+1})$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ und es würde $\partial_t w(t) = ib(x, D)w(t)$ und $w(s) = 0$ gelten. Die Gleichung für $\partial_t w(t)$ zeigt, dass $w \in C^1(I; H^k)$, wodurch wir die Energieabschätzungen anwenden können und es folgt $w(t) = 0$ für $t \in I$.

Mit der zweiten Energieabschätzung beweisen wir auf die gleiche Art, dass das duale Cauchy Problem

$$\begin{aligned} (\partial_t - ib^*(x, D))\psi(t) &= \varphi(t) \\ \psi(-s) &= 0 \end{aligned} \tag{3.19}$$

höchstens eine Lösung $\psi \in \bigcup_k C^0(I; H^k)$ hat.

Um die Existenz und Glattheit des Problems zu erhalten, werden wir zeigen, dass das Cauchy Problem mit Daten g und χ für jedes $k \in \mathbb{Z}$ eine Lösung $w_k \in C^0(I; H^{k-1})$ besitzt. Aufgrund der eben gezeigten Eindeutigkeit, sind alle diese Lösungen gleich einem einzigen $w \in \bigcap_k C^0(I; H^k)$.

Wählen wir ein beliebiges φ in

$$\mathbb{E} = \{(\partial_t - ib^*(x, D))\psi(t) : \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n), \text{supp } \psi \subset \{(t, x) : t > -s\}\},$$

so hat das Cauchy Problem (3.19) eine Lösung $\psi \in C^0(I; \mathcal{S})$, nämlich die Restriktion von ψ aus der Definition von \mathbb{E} . Wie wir zuvor schon gesehen haben, ist diese Lösung eindeutig und sie erfüllt die Energieabschätzung $\sup_{t \in I} \|\psi(t)\|_{(-k)} \leq C_k \int_I \|\varphi(t)\|_{(-k)} dt$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$. Für fixes $g \in C^0(I; \mathcal{S})$ und $\chi \in \mathcal{S}$ definieren wir ein lineares Funktional W auf \mathbb{E} durch

$$W(\varphi) = \langle \chi, \psi(s) \rangle - \int_I \langle g(t), \psi(t) \rangle dt,$$

wobei ψ die eindeutige Lösung des obigen Cauchy Problems ist. Wir erhalten

$$|W(\varphi)| \leq \left(\|\chi\|_{(k)} + \int_I \|g(t)\|_{(k)} dt \right) \sup_{t \in I} \|\psi(t)\|_{(-k)} \leq C'_k \int_I \|\varphi(t)\|_{(-k)} dt,$$

sodass W bezüglich der Norm des Raums $L^1(I; H^{-k})$ stetig ist. Nach dem Satz von Hahn-Banach existiert daher ein Element $w \in L^\infty(I; H^k) \simeq (L^1(I; H^k))'$, sodass

$$\langle \chi, \psi(s) \rangle - \int_I \langle g(t), \psi(t) \rangle dt = \int_I \langle w(t), (\partial_t - ib^*(x, D))\psi(t) \rangle dt$$

für alle $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ mit $\text{supp } \psi \subset \{(t, x) : t > -s\}$.

Wenn wir uns auch Funktionen $\psi \in C_0^\infty$ mit $\text{supp } \psi \subset \Omega := \{(t, x) : |t| < s\}$ beschränken, verschwindet der Term $\langle \chi, \psi(s) \rangle$ und die vorige Gleichung lautet dann $(\partial_t - ib(x, D))w(t) = g(t)$ in Ω . Daraus folgt, dass $\partial_t w \in L^\infty(I; H^{k-1})$, also $w \in C^0(I; H^{k-1})$ und gleichermaßen $w \in C^1(I; H^{k-2})$. Außerdem können wir zu jedem $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ein $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ konstruieren, sodass $\text{supp } \psi \subset \{(t, x) : t > -s\}$ und $\psi(s) = \varphi$. Durch partielle Integration von $\int_I \langle w(t), \partial_t \psi(t) \rangle dt$, erhalten wir $\langle w(s), \varphi \rangle = \langle \chi, \varphi \rangle$, wodurch bewiesen ist, dass die Funktion $w \in C^0(I; H^{k-1})$ eine Lösung des Cauchy Problems (3.18) mit Daten g und χ ist.

q.e.d.

Satz 3.24 (Propagation of Singularities)

Sei $a(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$ ein linearer Differentialoperator mit reellem Hauptsymbol $p(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x) D^\alpha$. Falls $u \in \mathcal{S}'$ Lösung einer Gleichung $a(x, D)u = f$ mit $f \in C^\infty$ ist, so ist $\text{WF}(u)$ eine Vereinigung von Bicharakteristischen Kurven p .

Beweis

Da $\text{WF } u$ eine abgeschlossene und eine bicharakteristische Kurve γ eine zusammenhängende Menge ist, ist $\text{WF } u \cap \gamma$ offensichtlich eine abgeschlossene Teilmenge von γ . Wenn wir wüssten, dass $\text{WF } u \cap \gamma$ auch offen ist, so ist dieser Durchschnitt für jede Bicharakteristik entweder die leere Menge oder die ganze Kurve. Wählen wir nun zu jedem Punkt $(x_0, \xi_0) \in \text{WF } u$ jene bicharakteristische Kurve γ , die in (x_0, ξ_0) beginnt und deren Durchschnitt mit $\text{WF } u$ daher nicht leer ist, so muss γ ganz in $\text{WF } u$ enthalten sein und es folgt die Behauptung. Es genügt also zu zeigen, dass für ein fixes $(x_0, \xi_0) \in \text{WF } u$, die bicharakteristische Kurve $\gamma(t) = (x(t), \xi(t))$, die in diesem Punkt beginnt, lokal in $\text{WF } u$ enthalten ist. Wir werden annehmen, dies wäre falsch und diese Annahme auf einen Widerspruch zurück führen.

Nach Voraussetzung ist $a(x, D)u \in C^\infty$ und nach Satz 3.20 gilt daher $\text{WF } u \subset \text{Char}(a)$. Da elliptische Symbole die Wave Front Set nicht beeinflussen und wir nur an dem Verhalten von u in einer Umgebung von (x_0, ξ_0) interessiert sind, betrachten wir ab sofort $v = \lambda^{m-1}(D)(\psi u)$, wobei wir $\psi \in C_0^\infty(B_{2\epsilon}(x_0))$ so wählen, dass $\psi = 1$ in $B_\epsilon(x_0)$. Diese Distribution v bietet den Vorteil, dass sie, für fixes $\varphi \in C_0^\infty(B_\epsilon(x_0))$, mit $\varphi = 1$ in $B_{\epsilon/2}(x_0)$, eine Gleichung der Art $b(x, D)v = \varphi f \in C_0^\infty$ erfüllt, wobei $b(x, D) = \varphi(x) a(x, D) \lambda^{1-m}(D)$ ein Operator in Ψ^1 ist. Außerdem gilt für das Symbol von $b(x, D)$

$$b(x, \xi) = \varphi(x) \# a(x, \xi) \# \lambda^{1-m}(\xi) = \varphi(x) a(x, \xi) \lambda^{1-m}(\xi),$$

da φ nur von x und λ^{1-m} nur von ξ abhängt (vgl. Bemerkung zu Satz 2.16). Weiters ist dieses Symbol polyhomogen, da alle drei Faktoren es sind, mit Hauptsymbol $q(x, \xi) = \varphi(x) p(x, \xi) |\xi|^{1-m}$ (vgl. Definition 2.13, sowie die Beispiele

2.14). Nach Voraussetzung ist $p(x, \xi)$ reell-wertig und daher gilt Selbiges auch für $q(x, \xi)$. Die Bicharakteristiken von p und q sind in der Nähe von (x_0, ξ_0) ident, da für Richtungen in der Wave Front Set $\xi_0 \neq 0$ gilt und somit wegen $\varphi(x_0)|\xi_0|^{1-m} \neq 0$ die Voraussetzung von Satz 3.22 erfüllt ist.

Der Widerspruch, den wir erreichen werden, ist $(x_0, \xi_0) \notin \text{WF } v = \text{WF } u$. Bezeichnet I wieder ein Intervall $(-s, s)$, so werden wir dazu eine Funktion $c(t) \in C^1(I; S^0)$ konstruieren (es ist dann für jedes fixe $t \in I$ der Funktionswert $c(t)$ ein Symbol in S^0 und wir schreiben auch $c(t, x, \xi)$ dafür), sodass $c(0, x, \xi)$ in (x_0, ξ_0) elliptisch ist und $c(0, x, \xi)v \in C^\infty$ gilt. Speziell werden wir Funktionen $g \in C^0(I; \mathcal{S})$ und $\chi \in \mathcal{S}$ finden, sodass $w(t) := c(t, x, \xi)v$ eine Lösung von (3.18) ist. Um die Aussagen von Lemma 3.23 anwenden zu können, müssen wir noch nachprüfen, dass unser Symbol b die Voraussetzung $b - b^* \in S^0$ erfüllt. Wir wissen aus der asymptotischen Entwicklung der Adjungierten, dass $b^* - \bar{b} \in S^0$, weswegen zu zeigen bleibt, dass $b - \bar{b} \in S^0$. b ist polyhomogen und hat daher eine Entwicklung, etwa $b \sim \sum_j b_j$. Klarerweise ist dann $b - \bar{b} \sim \sum_j b_j - \bar{b}_j$. Da jedoch $b_0 = q$ reell-wertig ist, ist der erste Term dieser Darstellung identisch gleich Null und somit die Voraussetzung erfüllt. Haben wir also Funktionen g und χ gefunden, so wird aus 3.23 folgen, dass $w(0) = c(0, x, \xi)v \in H^\infty \subset C^\infty$.

Aus Gründen der Einfachheit fixieren wir an dieser Stelle die folgenden beiden Notationen:

- (i) Hat $a \in S^m$ die asymptotische Entwicklung $a \sim \sum_j a_j$, so bezeichnen wir mit $r_a^{(k)}$ den Rest in S^k nach Abzug der ersten $m - k - 1$ Terme der Entwicklung. Das heißt

$$r_a^{(k)} = a - \sum_{j < m-k} a_j.$$

- (ii) Für zwei polyhomogene Symbole $a \in S^m$ und $b \in S^l$, mit reell-wertigen Hauptsymbolen p bzw. q , schreiben wir $[a, b]$ für das Symbol deren Kommutator,

$$[a, b] := a\#b - b\#a.$$

Mit $a\#b$ bzw. $b\#a$ hat auch dieses Symbol eine Entwicklung und wir schreiben $[a, b] \sim \sum_j [a, b]_j$. Für den ersten Terme gilt

$$[a, b]_0 = ab - ba = 0,$$

weswegen $[a, b]$ in S^{m+l-1} liegt. Außerdem berechnen wir noch explizit

$$\begin{aligned} [a, b]_1 &= \sum_{j=1}^n \partial_{\xi_j} p D_{x_j} q - \partial_{\xi_j} q D_{x_j} p \\ &= -i (\langle \partial_{\xi} p, \partial_x q \rangle - \langle \partial_x p, \partial_{\xi} q \rangle) \\ &= -i H_p q, \end{aligned}$$

wobei H_p das Hamilton Vektorfeld von p bezeichnet (vgl. (3.17)).

Wir wählen nun $c(t) \sim \sum_j c_j(t)$ so, dass c polyhomogen ist und

$$d(t) := \partial_t c(t) - i [b, c(t)]$$

eine stetige Funktion in t mit Werten in $S^{-\infty}$ ist. Nun gilt mit $b \in S^1$ und $c(t) \in S^0$ vorerst $d(t) \in S^0$. Der erste Term $c_0(t)$ soll also so gewählt werden, dass $d_0(t) = 0$ gilt. Modulo S^{-1} gilt

$$\begin{aligned} \partial_t c(t) - i[b, c(t)] &= \partial_t(c_0(t) + r_c^{(-1)}) - i[q + r_b^{(0)}, c_0(t) + r_c^{(-1)}] \\ &= \partial_t c_0(t) - i([q, c_0(t)] + [q, r_c^{(-1)}] + [r_b^{(0)}, c_0(t)] + [r_b^{(0)}, r_c^{(-1)}]) \\ &= \partial_t c_0(t) - i[q, c_0(t)]_1 \\ &= \partial_t c_0(t) - H_q c_0(t). \end{aligned}$$

Wir erhalten dann als definierende Bedingung von $c_0(t)$ das Cauchy Problem

$$\begin{aligned} (\partial_t - H_q)c_0(t) &= 0 \\ c_0(0) &= c^0(x, \xi). \end{aligned} \tag{3.20}$$

Mithilfe des Anfangswertes $c^0(x, \xi)$, den wir uns noch vorgeben können, behalten wir die Möglichkeit, das für uns eigentlich relevante Symbol $c(0, x, \xi)$ zu steuern. Vorläufig verlangen wir nur, dass c^0 homogen vom Grad 0 und elliptisch in (x_0, ξ_0) sein soll.

Bei der Wahl von $c_1(t) \in S^{-1}$ verwenden wir nun, dass c_0 (3.20) erfüllt und erhalten modulo S^{-2}

$$\begin{aligned} \partial_t c(t) - i[b, c(t)] &= \partial_t(c_0(t) + c_1(t) + r_c^{(-2)}) - i[q + r_b^{(0)}, c_0(t) + c_1(t) + r_c^{(-2)}] \\ &= \partial_t(c_0(t) + c_1(t)) - i([q, c_0(t)] + [q, c_1(t)] + [r_b^{(0)}, c_0(t)]) \\ &= \partial_t c_1(t) - i([q, c_0(t)]_2 + [q, c_1(t)]_1 + [r_b^{(0)}, c_0(t)]_1) \\ &= \partial_t c_1(t) - H_q c_1(t) - r_1(t), \end{aligned}$$

wobei $r_1(t) = i([q, c_0(t)]_2 + [r_b^{(0)}, c_0(t)]_1)$. Somit soll $c_1(t)$ folgendes Cauchy Problem lösen

$$\begin{aligned} (\partial_t - H_q)c_1(t) &= r_1(t) \\ c_1(0) &= 0. \end{aligned}$$

Führen wir diese Analyse weiter durch, so erhalten wir für $j \geq 1$ eine Folge von Problemen

$$\begin{aligned} (\partial_t - H_q)c_j(t) &= r_j(t) \\ c_j(0) &= 0, \end{aligned} \tag{3.21}$$

wobei $r_j(t)$ nur von b und den schon bekannten Symbolen $c_0(t), \dots, c_{j-1}(t)$ abhängt und das Vektorfeld $\partial_t - H_q$ reell ist.

Es handelt sich bei diesen Problemen um Differentialgleichungen erster Ordnung von der Form $F_j(v_x, v_\xi, v_t, z, x, \xi, t) = 0$, wobei

$$F_j(v_x, v_\xi, v_t, z, x, \xi, t) = r_j(t, x, \xi) - v_t + \langle \partial_\xi q(x, \xi), v_x \rangle - \langle \partial_x q(x, \xi), v_\xi \rangle.$$

Hier repräsentiert die z Variable die Lösung c_j und die v Variablen die entsprechenden Ableitungen von c_j nach x, ξ , bzw. t . Die Charakteristischen Kurven

$\eta_j(s) = (x(s), \xi(s), t(s))$ ergeben sich dann aus

$$\begin{aligned}\frac{dx}{ds} &= \partial_{v_x} F_j = \partial_\xi q(x(s), \xi(s)) \\ \frac{d\xi}{ds} &= \partial_{v_\xi} F_j = -\partial_x q(x(s), \xi(s)) \\ \frac{dt}{ds} &= \partial_{v_t} F_j = 1\end{aligned}$$

Aufgrund der letzten Gleichung können wir den Parameter s mit t identifizieren und betrachten fortan die Projektion $\eta_j(t) = (x(t), \xi(t))$. Jene charakteristischen Kurven η_j , die durch (x_0, ξ_0) gehen, sind daher *alle* gleich der Bicharakteristik γ und wir erhalten die Lösungen der Probleme (3.20) und (3.21) entlang γ als Lösungen von

$$\begin{aligned}\frac{dv_x}{dt} &= -\partial_x F_j, & \frac{dv_\xi}{dt} &= -\partial_\xi F_j, & \frac{dv_t}{dt} &= -\partial_t F_j \\ \frac{dz}{dt} &= \langle \partial_v F_j, v \rangle, & \text{wobei } \partial_v F_j &= (\partial_{v_x} F_j, \partial_{v_\xi} F_j, \partial_{v_t} F_j), & v &= (v_x, v_\xi, v_t).\end{aligned}$$

Diese Probleme sind gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung und können, dank des Satzes von Picard-Lindelöf, in der selben Umgebung von (x_0, ξ_0) gelöst werden und außerdem überträgt sich die Homogenität in ξ der rechten Seiten r_j auf die Lösungen. So ist jedes $c_j(t)$ getragen im Träger von $c_0(t)$. und in ξ vom Grad $-j$.

Stellen wir die zusätzliche Bedingung an c^0 , den Anfangswert von (3.20), dass $c_0 \in S_{\text{komp}}^0(\Gamma)$ für eine kleine kegelförmige Umgebung Γ von (x_0, ξ_0) , so können wir $c_j(t)$ aufgrund der Homogenität zu einem Symbol in $S_{\text{komp}}^{-j}(\Gamma)$ erweitern (setze $c_j(x, t\xi) = t^{-j} c_j(x, \xi)$ für ein ξ klein genug und alle $t > 0$).

Damit wählen wir nun das Symbol $c(t)$ als $c(t) \sim \sum_j c_j(t)$ nach Lemma 2.12 und dieses ist nach Konstruktion polyhomogen. Für jedes s im Definitionsbereich von c liegt der Träger von $c(s)$ in einem kleinen Kegel um $(x(s), \xi(s))$. Laut unserer Annahme, gibt es nun so ein s , sodass $(x(s), \xi(s)) \notin \text{WF } u$ und daher ist $w(s) = c(s, x, D)v =: \chi \in C^\infty$ (sogar $\chi \in C_0^\infty$, da der Träger von $c(s)$ in x kompakt ist).

Nach Lemma 1.37 ist die Distribution in einem Sobolev Raum, sodass $v = \lambda^{m-1}(D)(\psi u)$ für ein $N \in \mathbb{Z}_+$ in H^{-N} ist. Dann ist $w(t) = c(t, x, D)v \in C^0(I; H^{-N})$, da $c \in C^0(I; S^0)$. Setzen wir nun

$$g(t) := d(t, x, D)v - ic(t, x, D)b(x, D)v,$$

so erfüllt – wegen der Konstruktion von $c(t)$ – die Distribution $w(t)$ die Gleichung $\partial_t w(t) - ib(x, D)w(t) = g(t)$. Außerdem ist der erste Term in der Definition von g in $C^0(I; \mathcal{S})$, da $d \in C^0(I; S^{-\infty})$ und $v = \lambda^{m-1}(D)(\psi u)$ mit $\psi u \in \mathcal{E}'$. Insgesamt wird also ein glättender Ψ DO auf eine Distribution mit kompaktem Träger angewandt. In Lemma 2.26 haben wir gezeigt, dass wir dabei eine schnell fallende Funktion erhalten. Genauso ist der jedoch auch der zweite Term in $C^0(I; \mathcal{S})$, da $b(x, D)v = \varphi f \in C_0^\infty$ und wir erhalten, dass w eine $C^0(I; \mathcal{S})$ Lösung des Cauchy Problems (3.18) ist. Daher ist $w \in \bigcap_k C^0(I; H^k)$ und somit ist $c_0(x, D)v = w(0) \in H^\infty \subset C^\infty$ wie behauptet.

q.e.d.

Kapitel 4

Die stetige Curvelet-Transformation

In diesem Kapitel stellen wir die stetige Curvelet Transformation (kurz CCT = 'Continuous Curvelet Transform') aus [CanDo1] vor. Es handelt sich dabei um eine gerichtete Transformation – für Distributionen $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ – von drei Parametern: einem Level a , einem Ort $b \in \mathbb{R}^2$ und einer Richtung θ .

Wir werden beweisen, dass für die CCT eine Calderon-artige Reproduktionsformel existiert und uns danach an verschiedenen konkreten Beispielen ansehen, dass die CCT für $a \rightarrow 0$ immer schnell fallend ist, außer wenn das Tupel (b, θ) mit Ort und Richtung einer Singularität von f überein stimmt, also in der Wave Front Set von f liegt.

Die allgemeine Gültigkeit dieser empirische Beobachtung werden wir im Anschluss beweisen.

Den Abschluss dieses Kapitels bildet ein Abschnitt, der eine gerichtete Wavelettransformation vorstellt, die in einem gewissen Sinn zur CCT äquivalent ist. Die Motivation dafür ist, dass wir diese im nächsten Kapitel, zusammen mit der CCT, diskretisieren werden.

4.1 Definition der Curvelets

Diese im Anschluss beschriebene Transformation wird im 2-dimensionalen Raum durchgeführt. Ab sofort sind daher die bisher verwendeten Variablen x (Ortsvariable) und ξ (Frequenz-Bereich Variable) $\in \mathbb{R}^2$. Außerdem werden wir in Folge die Variablen r und ω als Polarkoordinaten im Frequenzbereich verwenden.

Zur Entwicklung einer Curvelet-Basis brauchen wir zunächst zwei glatte, nicht negative und reellwertige Fensterfunktionen ('window functions'), mit deren Hilfe wir den Träger der Curvelets im Frequenzbereich (also der Fouriertransformierten) kontrollieren werden.

Sei also

- $W : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ das Radialfenster, $\text{supp}(W) \subset (\frac{1}{2}, 2)$ und
- $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ das Winkelfenster, $\text{supp}(V) \subset [-1, 1]$

Die konkrete Wahl dieser Funktionen ist nicht wichtig, solange diese nur die folgenden *Zulässigkeitsbedingungen* erfüllen:

$$\int_0^\infty W(ar)^2 \frac{da}{a} = 1, \quad \forall r > 0 \quad (4.1)$$

$$\int_{-1}^1 V(u)^2 du = 1. \quad (4.2)$$

In dieser Arbeit werden wir allgemein annehmen, dass V und W aus C^∞ sind. Die Familie der analysierenden Elemente wird von drei Parametern abhängen: Dem Level $a > 0$, dem Ort $b \in \mathbb{R}^2$ und der Orientierung $\theta \in (-\pi, \pi)$.

Definition 4.1

Das erzeugende Curvelet eines Levels a definieren wir mittels eines Übergangs zu polaren Fourier-Koordinaten (r, ω) und setzen

$$\hat{\gamma}_{a00}(r, \omega) = W(ar) V\left(\frac{\omega}{\sqrt{a}}\right) a^{3/4}, \quad 0 < a < a_0 \quad (4.3)$$

Hierbei bezeichnet a_0 das größte Level unseres Problems. Es muss notwendigerweise $a_0 < \pi^2$ gelten, da sonst $\text{supp} V\left(\frac{\cdot}{\sqrt{a}}\right) \supset (-\pi, \pi]$. An einigen Stellen in der Entwicklung der Theorie werden wir allerdings $a < 1$ verwenden wollen und wir fixieren daher für diese Arbeit $a_0 = 1$.

Definition 4.2

Auf jedem Level a wird die Funktionenfamilie durch Translation und Rotation eines Basiselements γ_{a00} erzeugt:

$$\gamma_{ab\theta} = \gamma_{a00}(R_{-\theta}(x - b)), \quad (4.4)$$

wobei

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

die 2x2 Rotationsmatrix um θ Rad ist. Wir nennen diese Familie von Funktionen **Curvelets**.

Satz 4.3

Aus den beiden obigen Definitionen ergibt sich allgemein:

$$\hat{\gamma}_{ab\theta}(r, \omega) = e^{-ir \langle e_\omega, b \rangle} W(ar) V\left(\frac{\omega - \theta}{\sqrt{a}}\right) a^{3/4}, \quad (4.6)$$

wobei $e_\omega = \begin{pmatrix} \cos \omega \\ \sin \omega \end{pmatrix}$ den Einheitsvektor in Richtung ω bezeichnet.

Beweis

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}_{ab\theta}(\xi) &= (\gamma_{a00}(R_{-\theta}(x-b)))^\wedge(\xi) \\ &= \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} \gamma_{a00}(R_{-\theta}(x-b)) dx\end{aligned}$$

Substituiert man nun $z = R_{-\theta}(x-b)$, so gilt $dz = |R_{-\theta}|dx = dx$ und $x = R_{\theta}z + b$. Es folgt dann weiter, dass

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}_{ab\theta}(\xi) &= \int e^{-i\langle R_{\theta}z, \xi \rangle} e^{-i\langle b, \xi \rangle} \gamma_{a00}(z) dz \\ &= e^{-i\langle b, \xi \rangle} \int e^{-i\langle z, R_{-\theta}\xi \rangle} \gamma_{a00}(z) dz \\ &= e^{-i\langle b, \xi \rangle} \hat{\gamma}_{a00}(R_{-\theta}\xi)\end{aligned}$$

Geht man nun zu Polarkoordinaten über ($\xi = re_{\omega}$), so erhält man aus der Definition des Curvelets $\hat{\gamma}_{a00}$ in (4.3)

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}_{ab\theta}(r, \omega) &= e^{-ir\langle e_{\omega}, b \rangle} \hat{\gamma}_{a00}(r, \omega - \theta) \\ &= e^{-ir\langle e_{\omega}, b \rangle} W(ar) V\left(\frac{\omega - \theta}{\sqrt{a}}\right) a^{3/4}\end{aligned}$$

q.e.d.**Bemerkung**

Insbesondere folgt aus der Darstellung (4.6), dass $\hat{\gamma}_{a0\theta}$ für alle a und θ eine reell-wertige Funktion ist.

Definition 4.4 (CCT)

Mit dieser Familie von Curvelets ausgestattet, können wir nun die **Stetige Curvelet Transformation** (CCT – 'Continuous Curvelet Transform') Γ_f definieren. Dies ist folgende Funktion von einer Skalierungs-, einer Orts- und einer Richtungsvariable:

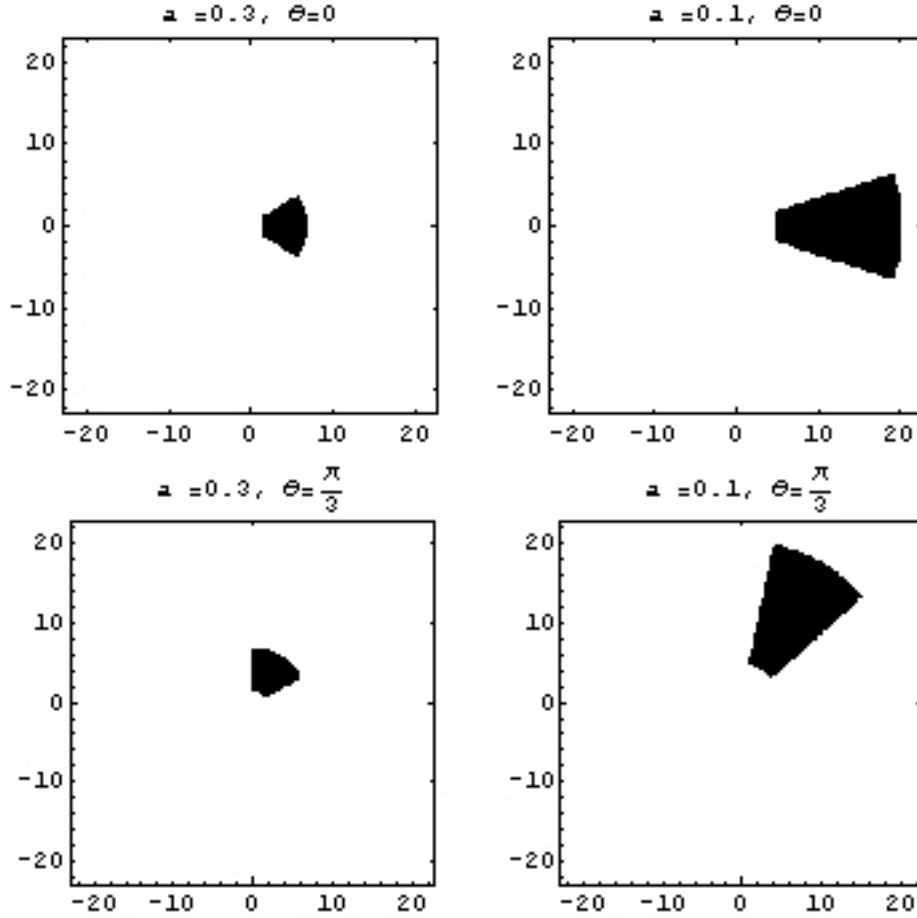
$$\Gamma_f(a, b, \theta) = \langle f, \gamma_{ab\theta} \rangle, \quad a < a_0, b \in \mathbb{R}^2, \theta \in [-\pi - 1, \pi + 1] \quad (4.7)$$

Bemerkung

Diese Definitionen, sowie spätere Abschätzungen könnten zu einer Sichtweise der Curvelets als skalierte Transformationen eines einzigen erzeugenden Curvelets führen, wie wir sie im letzten Abschnitt dieses Kapitel sehen werden. Allerdings ist es sehr wichtig festzuhalten, dass die Curvelets $\gamma_{ab\theta}$ keiner echten parabolischen Skalierungsvorschrift gehorchen, sprich es gibt kein 'Basis Curvelet' γ_{100} , sodass:

$$\gamma_{ab\theta} = \gamma_{100}(P_{a,\theta}(x-b)) \text{Det}(P_{a,\theta})^{1/2}$$

Die weitreichende Ähnlichkeit der Curvelets zu einer solchen Transformation wird jedoch bei deren Analyse, vor allem im diskreten Fall, eine große Rolle spielen. Mehr dazu folgt im letzten Abschnitt dieses Kapitels, sowie im nächsten Kapitel über die diskrete Curvelet Transformation.

Abbildung 4.1: $\Xi(a, \theta)$

4.2 Lokalisierung

In diesem Abschnitt werden wir sehen, dass ein Curvelet $\gamma_{ab\theta}(x)$ als Abstandsfunktion von b in der Metrik $|\cdot|_{a,\theta}$ aus (4.10) abfällt. Aus der Darstellung von $\hat{\gamma}_{ab\theta}(r, \omega)$ in (4.6) ist klar, dass der Träger von $\hat{\gamma}_{ab\theta}$ nicht von b abhängt und per Definition gilt $\text{supp } W \subset (\frac{1}{2}, 2)$ und $\text{supp } V \subset [-1, 1]$. Wir können daher einen Bereich $\Xi(a, \theta)$ angeben, sodass $\text{supp } \hat{\gamma}_{ab\theta} \subset \Xi(a, \theta)$. Und zwar sei von nun an

$$\Xi(a, \theta) := \{ \xi = r e_\omega \mid r \in (\frac{1}{2a}, \frac{2}{a}) \wedge \omega \in [\theta - \sqrt{a}, \theta + \sqrt{a}] \} \quad (4.8)$$

Es handelt sich hierbei also um den in Abb. 4.1 für verschiedene a und θ dargestellten Bereich, der zwischen den Kreisen mit Radien $\frac{1}{2a}$, bzw. $\frac{2}{a}$ um den Ursprung, sowie in einer kegelförmigen Umgebung von θ liegt.

Lemma 4.5

Für jedes $0 < a < a_0 = 1$ liegt der Träger von $\hat{\gamma}_{a00}$ innerhalb eines Rechtecks, welches, in den Ursprung verschoben, in einem Rechteck der Form

$$\left[-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right] \times \left[-\frac{2}{\sqrt{a}}, \frac{2}{\sqrt{a}}\right]$$

enthalten ist.

Beweis

Zuerst werden wir ein Rechteck Ξ_a der Art $\Xi_a = \left[\frac{c_1}{a}, \frac{c_2}{a}\right] \times \left[-\frac{c_3}{\sqrt{a}}, \frac{c_3}{\sqrt{a}}\right]$ finden, sodass $\Xi(a, 0) = \text{supp } \hat{\gamma}_{a00} \subset \Xi_a$. Aufgrund der Darstellung von $\Xi(a, \theta)$ in (4.8), erhalten wir nach Rücktransformation auf kartesische Koordinaten

$$\Xi(a, 0) \subset \left[\frac{1}{2a} \cos(\sqrt{a}), \frac{2}{a}\right] \times \left[-\frac{2}{a} \sin(\sqrt{a}), \frac{2}{a} \sin(\sqrt{a})\right].$$

Diese Situation ist in Abbildung 4.2 dargestellt, wo man sich leicht von der behaupteten Inklusion überzeugt.

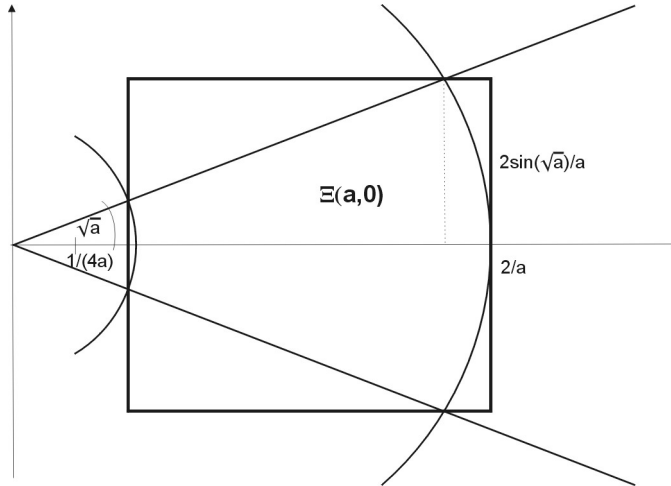


Abbildung 4.2: Rechteck um $\Xi(a, 0)$

Nun nimmt die Cosinus Funktion auf dem Intervall $[-1, 1]$ ihr Minimum in den Werten 1 und -1 an und es ist $\cos(1) \geq 1/2$. Für alle $a < a_0 = 1$ gilt daher

$$\frac{1}{4a} \leq \frac{1}{2a} \cos(\sqrt{a}).$$

Außerdem ist $\sin(\sqrt{a})/\sqrt{a} \leq 1$ für $0 < a < a_0 = 1$ und somit ist

$$\frac{2}{a} \sin(\sqrt{a}) \leq \frac{2}{\sqrt{a}}.$$

Zusammen ist

$$\Xi(a, 0) \subset \Xi_a = \left[\frac{1}{4a}, \frac{2}{a}\right] \times \left[-\frac{2}{\sqrt{a}}, \frac{2}{\sqrt{a}}\right].$$

Die Länge in der ersten Koordinate ist kleiner als $2/a$ und daher ist Ξ_a , verschoben in den Ursprung, in einem Rechteck der gewünschten Form enthalten.

q.e.d.

Da also jedes Curvelet $\gamma_{ab\theta}$ nach Konstruktion glatt ist und beschränkte Bandbreite hat (i.e. kompakter Träger im Fourier Bereich), gilt nach Satz 1.25, dass $\gamma_{ab\theta} \in \mathcal{S}$ und insbesondere

$$\gamma_{ab\theta}(x) = \mathcal{O}(|x|^{-N}) \quad \forall N > 0.$$

Die Koeffizienten $\langle f, \gamma_{ab\theta} \rangle$ der Transformation sind daher nicht nur für L_2 Funktionen, sondern für alle temperierten Distributionen $f \in \mathcal{S}'$ wohldefiniert.

Wir wollen nun die Geschwindigkeit des Abfalls von $\gamma_{ab\theta}(x)$ für wachsendes x noch genauer untersuchen und führen zu diesem Zweck eine neue Norm ein, die eng mit der CCT verbunden ist.

Defintion 4.6

Sei $P_{a,\theta}$ die parabolische, gerichtete Dilatation von \mathbb{R}^2 , gegeben in Matrixform durch:

$$P_{a,\theta} = D_{1/a} R_{-\theta},$$

wobei

$$D_{1/a} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{a} \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

und R_θ wie in Gleichung (4.5). Wir definieren für $v \in \mathbb{R}^2$ die Norm $|\cdot|_{a,\theta}$ durch:

$$|v|_{a,\theta} = |P_{a,\theta}(v)|. \quad (4.10)$$

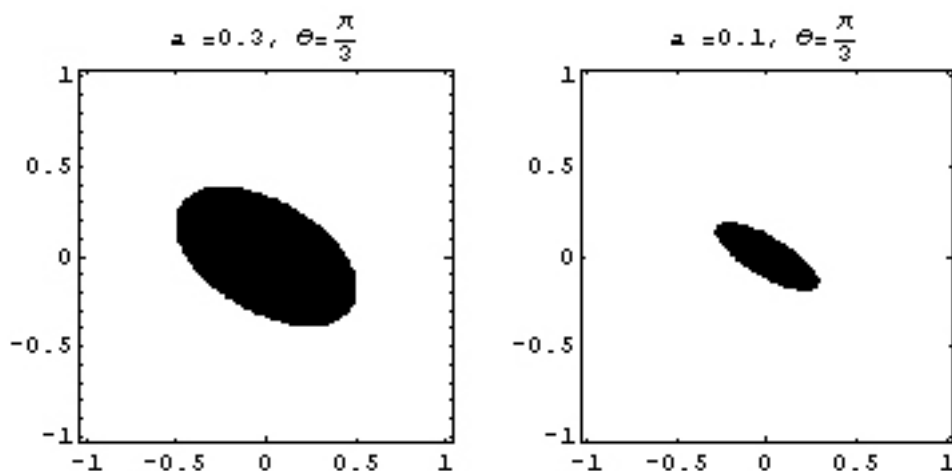
In dieser Metrik besteht die Menge der Punkte mit gleichem Abstand zu b aus einer anisotropen Ellipse mit Achsenlängen a und \sqrt{a} und kleiner Hauptachse in Richtung θ . Ein Kontour-Plot der Einheitsscheibe von $|\cdot|_{a,\theta}$, $B = \{v \in \mathbb{R}^2 : |v|_{a,\theta} \leq 1\}$, ist in Abbildung 4.3 dargestellt.

Offensichtlich gilt $|x| \leq |x|_{a,\theta}$, für $0 < a < 1$, da die Rotation R_θ die Norm unverändert lässt und $D_{1/a}$ für $a < 1$ eine Streckung in beiden Komponenten darstellt. Genauer noch gilt das folgende

Lemma 4.7

Für alle $0 < a < a_0 = 1, \theta \in (-\pi, \pi]$ und alle $x \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$|x|_{a,\theta} \geq \frac{|x|}{\sqrt{a}}. \quad (4.11)$$

Abbildung 4.3: Einheitskreise der Norm $|\cdot|_{a,\theta}$ **Beweis**

Die Behauptung folgt aus

$$|x|_{a,\theta} = |D_{1/a} R_{-\theta} x| = \frac{1}{\sqrt{a}} \left| \begin{pmatrix} 1/\sqrt{a} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} R_{-\theta} x \right| \geq \frac{|x|}{\sqrt{a}},$$

da $|R_{-\theta} x| = |x|$ und durch die Diagonalmatrix die erste Komponente betragsmäßig wächst, wodurch auch die Norm vergrößert wird.

q.e.d.

Wir werden sehen, dass $\gamma_{ab\theta}$ in der Tat als Abstandsfunktion von b in dieser Metrik fällt. Bevor wir diesen Sachverhalt in einem Satz formal aufschreiben, beweisen wir noch zwei Aussagen über den Einfluss eines kompakten Trägers im Fourier Bereich auf das lokale Verhalten einer Funktion. Besonders die zweite, skalierte Version wird sich als sehr nützlich erweisen. Besagter Zusammenhang wird durch die Normen $|\cdot|_{(m)}$ ausgedrückt, die im Anschluss definiert werden. Die Ähnlichkeit in der Notation zu den Normen $|\cdot|_k$, definiert in (1.9), liegt in den offensichtlichen Parallelen deren Definition begründet.

Definition 4.8

Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und f eine reellwertige Funktion in $C^\infty(X)$, dann ist die C^m Norm von f , $|f|_{(m)}$, definiert durch

$$|f|_{(m)} = \max_{|\alpha| \leq m} |\partial^\alpha f|_0 \quad (4.12)$$

Lemma 4.9

Sei g eine Funktion mit beschränkter Bandbreite und sei weiters Ξ ein fixes, beschränktes Rechteck, sodass $\hat{g} \in C_0^\infty(\Xi)$. Dann gibt es zu jedem $m \in \mathbb{N}_g$, den

geraden natürlichen Zahlen, eine konstante C_m , sodass

$$|g(x)| \leq C_m (\|\hat{g}\|_\infty + |\hat{g}|_{(m)}) \lambda^{-m}(|x|),$$

wobei die Konstanten C_m nur von m und der Fläche von Ξ , $A(\Xi)$, abhängen.

Beweis

Aus der Darstellung der inversen Fourier Transformation, $g(x) = (2\pi)^{-2} \int e^{i\langle \xi, b \rangle} \hat{g}(\xi) d\xi$ erhalten wir

$$|g(x)| \leq \int_{\Xi} |\hat{g}(\xi)| d\xi \leq \|\hat{g}\|_\infty A(\Xi). \quad (4.13)$$

Für die inverse Fourier Transformation von $\Delta \hat{g}$ gilt unter Verwendung des entsprechenden Analogons zu Satz 1.25 (ii)

$$(\Delta \hat{x})^\vee(x) d\xi = \sum_j (\partial_j^2 \hat{g})^\vee(x) = \sum_j (-x_j^2) (\hat{g})^\vee(x) = (-|x|^2) g(x).$$

Wiederholte Anwendung des Laplace-Operators Δ im Integranden liefert uns die Formel

$$|x|^{2k} |g(x)| \leq \int |\Delta^k \hat{g}(\xi)| d\xi \leq |\hat{g}|_{(2k)} A(\Xi). \quad (4.14)$$

Addieren wir nun die Ungleichungen (4.13) und (4.14), so folgt

$$(1 + |x|^{2k}) |g(x)| \leq A(\Xi) (\|\hat{g}\|_\infty + |\hat{g}|_{(2k)}).$$

Da $(1 + |x|^{2k})^{-1} \leq \lambda^{-2k}(|x|)$ beweist dies die Behauptung.

q.e.d.

Und nun eine skalierte Version dieses Lemmas.

Korollar 4.10

Sei f eine Funktion, sodass der Träger ihrer Fourier Transformierten \hat{f} in einem Rechteck

$$\Xi_a = \left[\frac{c_1}{a}, \frac{c_2}{a} \right] \times \left[-\frac{c_3}{\sqrt{a}}, \frac{c_3}{\sqrt{a}} \right]$$

enthalten ist und die skalierte Funktion

$$\hat{g}(\xi) = \hat{f}(D_{1/a}\xi) a^{-3/2}$$

Abschätzung der Art $\|\hat{g}\|_\infty \leq \rho_0$ und $|\hat{g}|_{(m)} \leq \rho_m$, für $m \in \mathbb{N}_g$ erfüllt, mit Konstanten ρ_m unabhängig von a . Dann gibt es zu jedem $m \in \mathbb{N}$ ein C_m , sodass

$$|f(x)| \leq C_m (\rho_0 + \rho_m) \lambda^{-m}(|x|_{a,0}).$$

Beweis

Aufgrund der Konstruktion von \hat{g} , ist ξ genau dann in $\text{supp } \hat{g}$, wenn $D_{1/a}\xi \in \text{supp } \hat{f} \subset \Xi_a$, was gleichbedeutend ist mit $\xi \in R$, wobei $R = [c_1, c_2] \times [-c_3, c_3]$. Damit erfüllt g die Voraussetzungen von Satz 4.9 und es folgt

$$|g(x)| \leq C_m (\rho_0 + \rho_m) \lambda^{-m}(|x|).$$

Nach Substitution von $\eta = D_{1/a}\xi$, $d\eta = a^{-3/2}d\xi$ bekommen wir, da D_a eine Diagonalmatrix ist und daher $D_a^{-1} = D_{1/a}$ und $\langle x, D_a\eta \rangle = \langle D_ax, \eta \rangle$ für alle $x, \eta \in \mathbb{R}^2$ gilt,

$$\begin{aligned} g(x) &= (2\pi)^{-2} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} \hat{g}(\xi) d\xi \\ &= (2\pi)^{-2} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} \hat{f}(D_{1/a}\xi) a^{-3/2} d\xi \\ &= (2\pi)^{-2} \int e^{i\langle x, D_a\eta \rangle} \hat{f}(\eta) d\eta \\ &= (2\pi)^{-2} \int e^{i\langle D_ax, \eta \rangle} \hat{f}(\eta) d\eta = f(D_ax). \end{aligned}$$

Es ist $|x|_{a,0} = |D_{1/a}x|$ und daher folgt die Behauptung durch

$$|f(x)| = |g(D_{1/a}x)| \leq C_m (\rho_0 + \rho_m) \lambda^{-m}(|x|_{a,0}).$$

q.e.d.

Nun werden wir zeigen, dass die Curvelets $\gamma_{ab\theta}$ in der Metrik $|\cdot - b|_{a,\theta}$ schnell fallend sind.

Satz 4.11

Seien V und $W \in C_0^\infty$. Dann gibt es für jedes $N \in \mathbb{N}$ eine C_N , sodass:

$$|\gamma_{ab\theta}(x)| \leq C_N a^{-3/4} \lambda^{-N}(|x - b|_{a,\theta})$$

Beweis

Wir zeigen zuerst, dass die erzeugenden Elemente jedes Levels γ_{a00} , die Voraussetzungen von Korollar 4.10 erfüllen. Die Anforderung an den Träger folgt unmittelbar aus Lemma 4.5. Sei nun g wie in Korollar 4.10 und seien (r_a, ω_a) die Polarkoordinaten von $D_{1/a}\xi$, dann ist

$$\hat{g}(\xi) = \hat{\gamma}_{a00}(D_{1/a}\xi)a^{-3/2} = W(ar_a)V\left(\frac{\omega_a}{\sqrt{a}}\right)a^{-3/4}.$$

Um das Korollar anwenden zu können müssen wir noch zeigen, dass die Normen $\|\cdot\|_\infty$ und $|\cdot|_{(m)}$ durch Konstanten ρ_m unabhängig von a beschränkt sind. Zu Beginn des Beweises von Korollar 4.10 wurde gezeigt, dass der Träger von \hat{g} in

einem fixen Rechteck R enthalten ist, unabhängig von a . Selbiges gilt daher für die skalierte Funktion

$$\hat{g}_1(\xi) = a^{3/4} \hat{g} = W(ar_a)V\left(\frac{\omega_a}{\sqrt{a}}\right),$$

deren Supremum daher ausschließlich von W und V abhängt. Genauso hängen die Werte von $|\hat{g}_1|_{(m)}$ nur von m und den Werten der ersten m Ableitungen von W und V ab. Aus der Kompaktheit von R und der Stetigkeit aller Ableitungen von W und V folgt schließlich, dass solche Konstanten ρ_m existieren. Daher erfüllen die Funktionen $a^{3/4} \hat{\gamma}_{a00}$ alle Voraussetzungen von Korollar 4.10 und das heißt, dass es zu jedem $N \in \mathbb{N}$ ein C_N gibt, sodass

$$|\gamma_{a00}(x)| \leq C_N a^{-3/4} \lambda^{-N} (|D_{1/a}x|),$$

woraus schließlich, wegen $\gamma_{ab\theta}(x) = \gamma_{a00}(R_{-\theta}(x-b))$, die Behauptung folgt,

$$|\gamma_{ab\theta}(x)| \leq C_N a^{-3/4} \lambda^{-N} (|D_{1/a}R_{-\theta}(x-b)|) = C_N a^{-3/4} \lambda^{-N} (|x-b|_{a,\theta}).$$

q.e.d.

Definition 4.12

Wir sagen, dass $\Gamma(a, b, \theta)$ in (b, θ) *schnell fallend* ist, falls für alle $N > 0$ gilt $|\Gamma(a, b, \theta)| = \mathcal{O}(a^N)$ für $a \rightarrow 0$. Ist $\Gamma(a, b, \theta)$ in (b, θ) nicht schnell fallend, so sagen wir, dass Γ langsam fällt, genauer fällt Γ mit Rate r , wenn $|\Gamma(a, b, \theta)| = \mathcal{O}(a^r)$ für $a \rightarrow 0$.

Lemma 4.13

Seien f_1 und f_2 beschränkte Funktionen, mit $f_1 = f_2$ in einer Umgebung von b . Γ_{f_1} ist in (b, θ) genau dann schnell fallend, wenn Γ_{f_2} in (b, θ) schnell fallend ist. Darüberhinaus fällt $\Gamma_{f_1}(a, b, \theta)$ auch genau dann mit Rate r , wenn $\Gamma_{f_2}(a, b, \theta)$ mit Rate r fällt.

Beweis

Wählen wir ϵ so klein, dass $f_1 = f_2$ auf $B_\epsilon(b) =: \mathcal{B}$, dann ist

$$\begin{aligned} |\Gamma_{f_1}(a, b, \theta) - \Gamma_{f_2}(a, b, \theta)| &\leq \int_{\mathcal{B}^c} |f_1(x) - f_2(x)| |\gamma_{ab\theta}(x)| dx \\ &\leq |f_1 - f_2|_0 \int_{\mathcal{B}^c} |\gamma_{ab\theta}(x)| dx \end{aligned}$$

Aus Satz 4.11 und Lemma 4.7 erhalten wir dann für alle $N > 1$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}^c} |\gamma_{ab\theta}(x)| dx &= \int_{\{|x|>\epsilon\}} |\gamma_{a0\theta}(x)| dx \\ &\leq C_N a^{-3/4} \int_{\{|x|>\epsilon\}} \lambda^{-N} (|x|_{a,\theta}) dx \\ &\leq C_N a^{-3/4+N/2} \int_{\{|x|>\epsilon\}} |x|^{-N} dx = \mathcal{O}(a^{(2N-3)/4}). \end{aligned}$$

Da also die Differenz aus Γ_{f_1} und Γ_{f_2} für $a \rightarrow 0$ schnell fallend ist, fallen die beiden Ausdrücke mit der gleichen Geschwindigkeit.

q.e.d.

4.3 Reproduktionsformel

Eine Transformation wie wir sie eben vorgestellt haben, kann nur von praktischem Nutzen sein, wenn durch ihre Anwendung keine Information verloren geht. Das bedeutet, wenn wir die Möglichkeit haben, aus den Koeffizienten nach der Transformation die ursprüngliche Funktion wieder zu rekonstruieren. Das diese Bedingung für die Curvelets erfüllt ist, sehen wir aus dem nun folgenden

Satz 4.14

Sei $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Dann existiert eine rein radiale Funktion mit beschränkter Bandbreite $\Phi \in L^2$, sodass mit $\Phi_{a_0,b} = \Phi(x-b)$,

$$f(x) = \int \langle f, \Phi_{a_0,b} \rangle \Phi_{a_0,b}(x) db + \int \langle f, \gamma_{ab\theta} \rangle \gamma_{ab\theta}(x) d\mu \quad (4.15)$$

und

$$\|f\|_2^2 = \int |\langle f, \Phi_{a_0,b} \rangle|^2 db + \int |\langle f, \gamma_{ab\theta} \rangle|^2 d\mu, \quad (4.16)$$

wobei $d\mu$ das Maß $d\mu = \frac{da}{a^3} db d\theta$ bezeichnet.

Bemerkung

Man kann daher sagen, dass eine "vollständige CCT" auf feinen Level aus Curvelets und auf groben Levels aus isotropen Wavelets bestehen müsste. Für unsere Analyse ist aber nur das Verhalten auf den feinen Level, also der echte Curvelet Anteil der CCT, von Bedeutung.

Bevor wir diesen Satz in dieser allgemeinen Form beweisen, behandeln wir zuerst nur den Fall von Funktionen, deren Fourier Transformierte innerhalb einer Kreisscheibe um den Ursprung identisch gleich Null sind (Funktionen mit dieser Eigenschaft heißen auch "hochfrequent"). Aus dem nächsten Satz geht hervor, dass Funktionen dieser Art aus der CCT exakt reproduziert werden können. Danach behandeln wir den "Wavelet-Anteil" von (4.15), der auf niedrige Frequenzen zurückzuführen ist. Wir erinnern daran, dass W und V die Fensterfunktionen aus der Definition von $\hat{\gamma}_{a00}(r, w)$ bezeichnen und die Zulässigkeitsbedingungen (4.1) beziehungsweise (4.2) erfüllen.

Satz 4.15

Sei $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ so, dass ihre Fourier Transformierte \hat{f} für $|\xi| < 2/a_0$ verschwindet. Dann gilt die Calderón-artige Reproduktionsformel

$$f(x) = \int \Gamma_f(a, b, \theta) \gamma_{ab\theta}(x) d\mu,$$

und die Parseval-artige Formel

$$\|f\|_2^2 = \int |\Gamma_f(a, b, \theta)|^2 d\mu,$$

wobei $d\mu$ das Maß $d\mu = \frac{da}{a^3} db d\theta$ bezeichnet.

Beweis

Wir betrachten zuerst den Beitrag eines einzelnen Tupels (a, θ) zur Reproduktionsformel

$$g_{a,\theta}(x) = \int \langle f, \gamma_{ab\theta} \rangle \gamma_{ab\theta}(x) db.$$

Nun ist $\gamma_{ab\theta}(x) = \gamma_{a0\theta}(x-b)$ (vgl. (4.4)) und daher

$$\begin{aligned} g_{a,\theta}(x) &= \int \left(\int f(y) \bar{\gamma}_{a0\theta}(y-b) dy \right) \gamma_{a0\theta}(x-b) db \\ &= \int \gamma_{a0\theta}(x-b) (\tilde{\tilde{\gamma}}_{a0\theta} \star f)(b) db \\ &= (\gamma_{a0\theta} \star \tilde{\tilde{\gamma}}_{a0\theta} \star f)(x). \end{aligned}$$

Wir werden nun davon die Fourier Transformierte bilden und dabei verwenden, dass

$$\begin{aligned} \hat{\tilde{\tilde{\gamma}}}_{a0\theta}(\xi) &= \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} \bar{\gamma}_{a0\theta}(-x) dx \\ &= \overline{\int e^{-i\langle x, \xi \rangle} \gamma_{a0\theta}(x) dx} = \hat{\gamma}_{a0\theta}(\xi), \end{aligned}$$

da $\hat{\gamma}_{a0\theta}$ reell-wertig ist (vgl. (4.6)). Weiters sind $\gamma_{a0\theta}$, $\tilde{\tilde{\gamma}}_{a0\theta}$ und $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ und mit Korollar 1.39 können wir deshalb schreiben

$$\hat{g}_{a,\theta}(\xi) = (\gamma_{a0\theta} \star \tilde{\tilde{\gamma}}_{a0\theta} \star f)^\wedge(\xi) = \hat{\gamma}_{a0\theta}(\xi)^2 \hat{f}(\xi). \quad (4.17)$$

Also ist $\hat{g}_{a,\theta}(\xi)$ eine Funktion mit kompaktem Träger, wodurch $g_{a,\theta}(x) \in \mathcal{S}$ ist. Um zu beweisen, dass

$$f(x) = \int_0^{a_0} \int_{-(\pi+1)}^{\pi+1} g_{a,\theta}(x) d\theta \frac{da}{a^3},$$

genügt es zu zeigen, dass die Fourier Transformation von f gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \iiint e^{-i\langle x, \xi \rangle} g_{a,\theta}(x) d\theta \frac{da}{a^3} dx \\ &= \iint \hat{g}_{a,\theta}(\xi) d\theta \frac{da}{a^3} \\ &= \iint \hat{\gamma}_{a0\theta}(\xi)^2 \hat{f}(\xi) d\theta \frac{da}{a^3} \\ &= \hat{f}(\xi) \iint \hat{\gamma}_{a0\theta}(\xi)^2 d\theta \frac{da}{a^3}. \end{aligned}$$

Es bleibt daher noch zu beweisen, dass

$$1 = \int_0^{a_0} \int_{-(\pi+1)}^{\pi+1} |\hat{\gamma}_{a0\theta}(\xi)|^2 d\theta \frac{da}{a^3} \quad \forall \xi \in \text{supp } \hat{f}. \quad (4.18)$$

Es fällt besonders auf, dass hier die linke Seite konstant, also insbesondere unabhängig von ξ , ist. Zusammenhänge dieser Art sind eine Grundlage von Calderón-ähnlichen Reproduktionsformeln.

Die Aussage (4.18) folgt, wie wir sehen werden, aus den Zulässigkeitsbedingungen an W und V (4.1) bzw. (4.2). Dazu verwenden wir die Darstellung von $\hat{\gamma}$ aus (4.6) und erhalten

$$\int_0^{a_0} \int_{-(\pi+1)}^{\pi+1} |\hat{\gamma}_{a0\theta}(\xi)|^2 d\theta \frac{da}{a^3} = \int_0^{a_0} W(ar)^2 \int_{-(\pi+1)}^{\pi+1} V\left(\frac{w-\theta}{\sqrt{a}}\right)^2 d\theta a^{3/2} \frac{da}{a^3}.$$

Da für alle $0 < a < a_0 = 1$ und $\omega \in (-\pi, \pi]$ gilt, dass

$$\frac{\omega + \pi + 1}{\sqrt{a}} \geq 1 \quad \text{und} \quad \frac{\omega - (\pi + 1)}{\sqrt{a}} \leq -1$$

folgt aus der Bedingung (4.2) für V , dass

$$\int_{-(\pi+1)}^{\pi+1} V\left(\frac{w-\theta}{\sqrt{a}}\right)^2 d\theta = \int_{-1}^1 V(t)^2 dt \sqrt{a} = \sqrt{a},$$

mit $c = \frac{w-2\pi}{\sqrt{a}}$ und damit reduziert sich (4.18) zu

$$1 = \int_0^{a_0} W(ar)^2 \frac{da}{a} \quad \forall r \geq \frac{2}{a_0},$$

da in $\text{supp } \hat{f}$ nach Voraussetzung gilt, dass $r = |\xi| \geq 2/a_0$. Durch neuerliche Variablentransformation und die Zulässigkeitsbedingung von W erhalten wir

$$\int_0^{a_0} W(ar)^2 \frac{da}{a} = \int_0^{a_0 r} W(a)^2 \frac{da}{a} = \int_{1/2}^2 W(a)^2 \frac{da}{a} = 1,$$

was den Beweis von (4.18) vervollständigt.

Wir wenden uns nun dem Beweis der Parseval-ähnlichen Formel zu. Analog zu obigen Umformungen gilt

$$\langle f, \gamma_{ab\theta} \rangle = \int f(x) \gamma_{a0\theta}(x-b) dx = (f \star \tilde{\gamma}_{ab\theta})(b)$$

und somit erhalten wir unter Verwendung von Parsevals Formel und (4.18)

$$\begin{aligned} \int |\langle f, \gamma_{ab\theta} \rangle|^2 d\mu &= \iint \left(\int |(f \star \tilde{\gamma}_{a0\theta})(b)|^2 db \right) d\theta \frac{da}{a^3} \\ &= (2\pi)^{-2} \iint \left(\int |\hat{f}(\xi)|^2 |\hat{\gamma}_{a0\theta}(\xi)|^2 d\xi \right) d\theta \frac{da}{a^3} \\ &= (2\pi)^{-2} \int |\hat{f}(\xi)|^2 \left(\iint |\hat{\gamma}_{a0\theta}(\xi)|^2 d\theta \frac{da}{a^3} \right) d\xi \\ &= (2\pi)^{-2} \int |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = (2\pi)^{-2} \|\hat{f}\|_2^2 = \|f\|_2^2 \end{aligned}$$

was alle Behauptungen beweist.

q.e.d.

Nun werden wir diese Analyse für den allgemeinen Fall verfeinern.

Beweis von Satz 4.14

Um diese Zusammenhänge auf den Fall von niedrigen Frequenzen auszuweiten, definieren wir zuerst

$$P_1 f(x) = \int \Gamma_f(a, b, \theta) \gamma_{ab\theta}(x) d\mu. \quad (4.19)$$

Im Frequenzbereich erhalten wir aus den exakt gleichen Umformungen wie im Beweis von Satz 4.15

$$\widehat{P_1 f}(\xi) = \hat{f}(\xi) \cdot \left(\int_0^{a_0} W(a|\xi|)^2 \frac{da}{a} \right) = \hat{f}(\xi) \cdot \hat{\Psi}(\xi)^2,$$

wobei

$$\hat{\Psi}(\xi)^2 = \int_0^{a_0} W(a|\xi|)^2 \frac{da}{a} = \int_0^{a_0|\xi|} |W(a)|^2 \frac{da}{a}.$$

Sei nun $P_0 f := f - P_1 f$, dann ist

$$\widehat{P_0 f}(\xi) = \hat{f}(\xi) - \hat{f}(\xi) \cdot \hat{\Psi}(\xi)^2 = \hat{f}(\xi) \cdot \hat{\Phi}(\xi)^2, \quad (4.20)$$

wobei

$$\hat{\Phi}(\xi)^2 := 1 - \hat{\Psi}(\xi)^2 = \int_{a_0|\xi|}^2 |W(a)|^2 \frac{da}{a},$$

da $\text{supp } W \subset [1/2, 2]$, woraus ersichtlich ist, dass $\hat{\Phi}$ reell-wertig ist und nur von $|\xi|$ abhängt, also eine radiale Funktion ist. Weiters folgt

$$\hat{\Phi}(\xi)^2 = \begin{cases} 1 & \text{für } |\xi| < \frac{1}{2a_0}, \\ 0 & \text{für } |\xi| > \frac{2}{a_0}, \end{cases} \quad (4.21)$$

also insbesondere hat $\hat{\Phi}$ auch kompakten Träger. Damit ist gezeigt, dass die Funktion $\hat{\Phi}$ alle Behauptungen erfüllt. Darüberhinaus ist $0 \leq \hat{\Phi}(\xi)^2, \hat{\Psi}(\xi)^2 \leq 1$ und aus der Definition von $\hat{\Phi}(\xi)^2$ ergibt sich unmittelbar

$$\hat{\Phi}(\xi)^2 + \hat{\Psi}(\xi)^2 = 1.$$

Wie schon erwähnt handelt es sich bei $\hat{\Phi}$ um eine reell-wertige, radiale Funktion und daraus folgt, dass $\hat{\Phi} = \tilde{\hat{\Phi}}$ und $\widehat{P_0 f}(\xi) = \hat{f}(\xi) \tilde{\hat{\Phi}}(\xi) \hat{\Phi}(\xi)$. Wenden wir die inverse Fourier Transformation an, erhalten wir unter Verwendung der Eigenschaften von Φ und (1.22),

$$\begin{aligned} P_0 f(x) &= \left((f \star \tilde{\Phi}) \star \Phi \right) (x) = \int (f \star \tilde{\Phi})(b) \Phi(x-b) db \\ &= \int \left(\int f(y) \Phi(y-b) dy \right) \Phi(x-b) db \\ &= \int \langle f, \Phi_{a_0, b} \rangle \Phi_{a_0, b}(x) db, \end{aligned}$$

wobei $\Phi_{a_0, b}(x) = \Phi(x-b)$ eine Translation des 'Basiswavelets' Φ ist.

Für die Parseval-artige Formel, verwenden wir, dass

$$\|f\|_2^2 = \langle f, P_0 f + P_1 f \rangle = \langle f, P_0 f \rangle + \langle f, P_1 f \rangle.$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}\langle f, P_0 f \rangle &= \int f(x) \int \overline{\langle f, \Phi_{a_0, b} \rangle} \cdot \bar{\Phi}_{a_0, b}(x) \, db \, dx \\ &= \int \overline{\langle f, \Phi_{a_0, b} \rangle} \left(\int f(x) \bar{\Phi}_{a_0, b}(x) \, dx \right) db \\ &= \int |\langle f, \Phi_{a_0, b} \rangle|^2 db.\end{aligned}$$

und ganz analog

$$\begin{aligned}\langle f, P_1 f \rangle &= \int f(x) \int \overline{\langle f, \gamma_{ab\theta} \rangle} \cdot \bar{\gamma}_{ab\theta}(x) \, d\mu \, dx \\ &= \int \overline{\langle f, \gamma_{ab\theta} \rangle} \left(\int f(x) \bar{\gamma}_{ab\theta}(x) \, dx \right) d\mu \\ &= \int |\langle f, \gamma_{ab\theta} \rangle|^2 d\mu.\end{aligned}$$

wodurch der Satz bewiesen ist.

q.e.d.

Bemerkung

Mit Ψ und Φ , wie im Beweis von Satz 4.14, gilt außerdem

$$\int |\langle f, \Phi_{a_0, b} \rangle|^2 db = \int |(f \star \tilde{\Phi})(b)|^2 db = \|f \star \Phi\|_2^2$$

und

$$\begin{aligned}\int |\langle \gamma_{ab\theta}, f \rangle|^2 d\mu &= (2\pi)^{-2} \int |\hat{f}(\xi)|^2 \left(\iint |\hat{\gamma}_{a_0\theta}(\xi)|^2 d\theta \frac{da}{a^3} \right) d\xi \\ &= (2\pi)^{-2} \int |\hat{f}(\xi) \hat{\Psi}(\xi)|^2 d\xi = \|f \star \Psi\|_2^2.\end{aligned}$$

4.4 Analyse einfacher Singularitäten

Um eine gewisse Intuition für das Verhalten der Curvelettransformation zu entwickeln, sehen wir uns nun einige Beispiele an, in denen f abgesehen von Singularitäten glatt ist, und diskutieren das asymptotische Verhalten von $\Gamma_f(a, b, \theta)$ für $a \rightarrow 0$ bei fixem (b, θ) . Dazu sei vorweg bemerkt, dass aus den Resultaten des letzten Kapitels folgt, dass für sehr kleine $a > 0$ der Träger von $\hat{\gamma}_{ab\theta}$ sich in einem engen Kegel um den Strahl $\{\lambda e_\theta : \lambda > 0\}$ befindet, wobei wie schon zuvor $e_\theta = (\cos \theta, \sin \theta)$, den Einheitsvektor in Richtung θ bezeichnet. Mit abnehmendem a entfernt sich dieser außerdem zunehmend vom Ursprung. Das Verhalten von $\Gamma_f(a, b, \theta)$ für $a \rightarrow 0$ wird also eng mit dem Verhalten von $\hat{f}(\lambda e_\theta)$ für $\lambda \rightarrow 0$ zusammenhängen. Formal hingeschrieben heißt das:

Satz 4.16

Sei f eine Distribution, deren Fouriertransformation \hat{f} Folgendes erfüllt:

$$\hat{f}(\lambda e_\omega) \sim \lambda^{-\rho} A(\omega), \quad \lambda \rightarrow \infty$$

mit stetigem $A(\omega)$. Falls $A(\theta) \neq 0$, dann

$$\Gamma_f(a, 0, \theta) \sim a^{\rho-3/4} A(\theta) \cdot C_\rho, \quad \text{für } a \rightarrow 0, \quad (4.22)$$

wobei

$$C_\rho = \int_{1/2}^2 W(r) r^{1-\rho} dr \cdot \int_{-\infty}^{\infty} V(t) dt.$$

Beweis

Um dies zu beweisen verwenden wir die Parseval'sche Gleichung $\langle \gamma_{a0\theta}, f \rangle = (2\pi)^{-2} \langle \hat{\gamma}_{a0\theta}, \hat{f} \rangle$ um zum Frequenzbereich überzugehen, wo, da $\hat{\gamma}_{a0\theta}$ in einem engen Kegel um den Strahl $\{\lambda e_\theta : \lambda > 0\}$ lokalisiert ist

$$\begin{aligned} \int \hat{\gamma}_{a0\theta}(\xi) \hat{f}(\xi) d\xi &\sim \int \hat{\gamma}_{a0\theta}(\xi) |\xi|^{-\rho} A(\theta) d\xi \quad a \rightarrow 0, \\ &\sim A(\theta) \iint W(ar) \cdot V\left(\frac{\omega - \theta}{\sqrt{a}}\right) \cdot a^{3/4} \cdot r^{1-\rho} d\omega dr \\ &= A(\theta) \cdot a^{3/4} \cdot \int W(ar) r^{1-\rho} dr \cdot \int V\left(\frac{\omega - \theta}{\sqrt{a}}\right) d\omega \\ &= A(\theta) \cdot a^{3/4} \cdot \int W(s) \left(\frac{s}{a}\right)^{1-\rho} \frac{ds}{a} \cdot \int V(t) \sqrt{a} dt \\ &= A(\theta) \cdot a^{\rho-3/4} C_\rho \end{aligned}$$

q.e.d.

Mit analogen Umformungen erhält man

Korollar 4.17

Sei f eine Distribution, deren Fouriertransformation \hat{f} folgender Ungleichung genügt:

$$|\hat{f}(\lambda e_\omega)| \leq \lambda^{-\rho} A_{\theta,\delta},$$

für $|\omega - \theta| < \delta$ und $\lambda > \frac{1}{\delta}$, dann

$$|\Gamma_f(a, 0, \theta)| \leq a^{\rho-3/4} A_{\theta,\delta} \cdot C \quad \text{mit } a \rightarrow 0.$$

Korollar 4.18

Ist $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, so ist $\Gamma_f(a, b, \theta)$ für jedes (b, θ) schnell fallend.

Beweis

Ist $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ so gilt nach Satz 1.29, dass \hat{f} ist schnell fallend und somit erfüllt f die Voraussetzung des vorherigen Korollars für alle $\rho > 0$ und wir erhalten $|\Gamma(a, b, \theta)| = \mathcal{O}(a^N)$ für $N > 0$ mit $a \rightarrow 0$.

q.e.d.

Punktförmige Singularitäten

In den nächsten Abschnitten betrachten wir Beispiele von Objekten, die glatt sind, abgesehen von Singularitäten in Punkten oder entlang von Kurven und das Verhalten von $\Gamma_f(a, b, \theta)$ für b 'auf' beziehungsweise 'neben' den Singularitäten. Wir werden sehen, dass wenn die Singularitäten auf einer Kurve liegen, es auch darauf ankommt ob θ transversal oder tangential zu den Singularitäten ist.

Beispiel 4.19

Zu Anfang betrachten wir die Dirac Distribution δ , mit Wert 1 im Ursprung und 0 sonst. Bekanntlich ist $\hat{\delta}(\xi) = \int e^{i(x,\xi)} \delta(x) dx = e^0 = 1 \quad \forall \xi$. Somit sind die Voraussetzungen des Satzes in Kapitel 4.4 mit $\rho = 0, A(\omega) \equiv 1$ erfüllt und wir erhalten aus Gleichung (4.22) für $b = 0$:

$$\Gamma_\delta(a, 0, \theta) = a^{-3/4} C \quad \forall \theta \forall 0 < a < a_0.$$

Die Transformation wächst also sogar für $a \rightarrow 0$.

Andererseits gilt für den Fall $b \neq 0$:

$$\Gamma_\delta(a, b, \theta) = \langle \delta, \gamma_{ab\theta} \rangle = \gamma_{ab\theta}(0) = \gamma_{a0\theta}(-b).$$

Satz 4.11 impliziert besonders, dass wenn $b \neq 0$, dann fällt $\gamma_{a0\theta}(b)$ schnell gegen 0, mit $a \rightarrow 0$. Somit ist die Transformation in diesem Fall schnell fallend.

Zusammenfassend:

- Falls $b \neq 0$, dann fällt $\Gamma_\delta(a, b, \theta)$ schnell gegen 0, mit $a \rightarrow 0$;
- Falls $b = 0$, dann wächst $\Gamma_\delta(a, b, \theta)$ mit der Potenz $-3/4$ in jeder Richtung θ .

Beispiel 4.20

Als zweites Beispiel betrachten wir die Punktsingularität $\sigma_\alpha(x) = |x|^\alpha$ für $-2 < \alpha < \infty$. Für jeden dieser Werte von α ist die Funktion lokal integrierbar (siehe Definition 1.4) und somit eine temperierte Distribution, für die die gerichtete Transformation definiert werden kann. Aus Standard Reskalierungs-Argumenten folgt:

$$\hat{\sigma}_\alpha(\xi) = C_\alpha |\xi|^{-2-\alpha}$$

und somit erhalten wir für $b = 0$ unter neuerlicher Anwendung von Satz 4.16 ($\rho = 2 + \alpha$), dass

$$\Gamma_\delta(a, 0, \theta) = a^{5/4+\alpha} C$$

Vergleichen wir dieses Ergebnis mit dem vorigen Beispiel, so sehen wir, dass sich für $\alpha = -2$ die gleiche Konvergenzgeschwindigkeit ergibt wie für δ . Dies macht Sinn, da die beiden Fälle gewissermaßen ähnlich zueinander sind.

Andererseits, für $b \neq 0$, erhalten wir schnellen Abfall. Als erster Fall seien (b, θ) so, dass $\langle e_\theta, b \rangle \neq 0$. Unter Verwendung von $\hat{\gamma}_{ab\theta}(\xi) = e^{-i\langle \xi, b \rangle} \hat{\gamma}_{a0\theta}(\xi)$ schreiben wir

$$\begin{aligned} \langle \hat{\sigma}_\alpha, \hat{\gamma}_{ab\theta} \rangle &= C_\alpha \int |\xi|^{-2-\alpha} \hat{\gamma}_{ab\theta}(\xi) d\xi \\ &= C_\alpha \iint r^{-2-\alpha} W(ar) e^{-ir\langle e_\omega, b \rangle} V\left(\frac{\omega - \theta}{\sqrt{a}}\right) a^{3/4} r d\omega dr \\ &= C_\alpha a^{\frac{3}{4}+\alpha} \int V\left(\frac{\omega - \theta}{\sqrt{a}}\right) \left(\int W(ar) e^{-ir\langle e_\omega, b \rangle} a^{-\alpha} r^{-1-\alpha} dr \right) d\omega \\ &= C_\alpha a^{\frac{3}{4}+\alpha} \int V\left(\frac{\omega - \theta}{\sqrt{a}}\right) \tilde{W}\left(\frac{\langle e_\theta, b \rangle}{a}\right) d\omega \\ &\sim C_\alpha a^{\frac{5}{4}+\alpha} \tilde{W}\left(\frac{\langle e_\theta, b \rangle}{a}\right) \quad a \rightarrow 0 \end{aligned}$$

wobei $\tilde{W}(u) = \int_{1/2}^2 r^{-1-\alpha} W(r) e^{-iru} dr$ eine Funktion mit beschränkter Bandbreite ist, die – mit $|u| \rightarrow \infty$ – schnell fallend ist. Der zweite Fall, $\langle e_\theta, b \rangle = 0$ wird bis auf den letzten Schritt ganz analog behandelt. Wir fassen also für den Fall $\sigma_\alpha(x) = |x|^\alpha$ zusammen:

- Falls $b \neq 0$, dann fällt $\Gamma_{\sigma_\alpha}(a, b, \theta)$ schnell gegen 0, mit $a \rightarrow 0$;
- Falls $b = 0$, dann wächst $\Gamma_{\sigma_\alpha}(a, b, \theta)$ mit der Potenz $5/4 + \alpha$ in jeder Richtung θ .

Es sei darauf hingewiesen, dass in beiden diesen Beispielen das Verhalten in jedem Punkt b für alle Richtungen gleich ist: Punktförmige Singularitäten sind isotrop.

Lineare Singularitäten

Beispiel 4.21

Wir betrachten als einen Prototyp von linearer Singularität die Distribution ν , die auf geeignete Funktionen als Integration entlang der x_2 -Achse wirkt:

$$\langle \nu, f \rangle = \int f(0, x_2) dx_2.$$

Diese Distribution ist auf der x_2 -Achse getragen und ist gegenüber Veränderungen von f in x_2 insensibel, aber sehr sensibel für Veränderungen in x_1 . Die Fouriertransformierte $\hat{\nu}$ ist eine Distribution, die auf der ξ_1 -Achse $\{\xi : \xi_2 = 0\}$ getragen ist und erfüllt

$$\langle \hat{\nu}, \hat{f} \rangle = \int \hat{f}(\xi_1, 0) d\xi_1.$$

Daher ist $\langle \nu, \gamma_{ab\theta} \rangle = (2\pi)^{-2} \cdot \int \hat{\gamma}_{ab\theta}(\xi_1) d\xi_1$.

Nun ist aber der Träger von $\hat{\gamma}_{ab\theta}$ in einem Kegel $\Xi(a, \theta)$ wobei auch $|\xi| \in$

$\{\frac{1}{2a}, \frac{2}{a}\}$ und $\omega \in [\theta - \sqrt{a}, \theta + \sqrt{a}]$. Dieser Kegel schneidet die ξ_1 -Achse nicht, falls $|\theta| > \sqrt{a}$. Somit ist - falls $\theta \neq 0$ - $\langle \nu, \gamma_{ab\theta} \rangle = 0$ für alle hinreichend kleinen $a > 0$. Kurz gesagt, für $\theta \neq 0$ haben wir schnellen Abfall.

Andererseits, für $\theta = 0$:

$$\langle \nu, \gamma_{ab\theta} \rangle = (2\pi)^{-2} \int W(ar) V(0) a^{3/4} e^{-ir \langle e_\theta, b \rangle} dr = a^{-1/4} \tilde{W}\left(\frac{b_1}{a}\right),$$

wobei $\tilde{W}(u) = (2\pi)^{-2} \cdot V(0) \cdot \int W(r) e^{-iru} dr$ glatt und schnell fallend für $|u| \rightarrow \infty$. Somit $\langle \nu, \gamma_{ab\theta} \rangle \rightarrow 0$ schnell bei $\theta = 0$ für jedes fixe $b_1 \neq 0$.

Sei schließlich $b = (0, b_2)$,

$$\langle \nu, \gamma_{ab\theta} \rangle = (2\pi)^{-2} \int W(ar) V(0) a^{3/4} dr = a^{-1/4} \tilde{W}(0).$$

Also

- Falls $(b, \theta) = ((0, x_2), 0)$, dann wächst $\Gamma_\nu(a, b, \theta)$ wie $\mathcal{O}(a^{-1/4})$ mit $a \rightarrow 0$.
- Andernfalls ist $\Gamma_\nu(a, b, \theta)$ schnell fallend mit $a \rightarrow 0$;

Die Suche nach Punkten in der (b, θ) -Ebene, an denen der Abfall von $\Gamma_\nu(a, b, \theta)$ langsam ist, fördert genau die Richtung und Lage der Singularitäten entlang der Geraden $x_1 = 0$ zu Tage.

Beispiel 4.22

Die gleichen Überlegungen gelten auch für andere lineare Singularitäten; betrachten wir die ebene Heaviside Funktion $H(x) = 1_{\{x_1 \geq 0\}}$. Da $\nu = \frac{\partial}{\partial x_1} H$, gilt $\hat{H}(\xi) = (i\xi_1)^{-1} \hat{\nu}(\xi)$ und somit

$$\langle H, \gamma_{ab\theta} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (i\xi_1)^{-1} \hat{\nu}(\xi) \hat{\gamma}_{ab\theta}(\xi_1, 0) d\xi_1.$$

Wenden wir nun die Ergebnisse des vorigen Beispiels für ν an, so erhalten wir

- Falls $\theta \neq 0$ ist, dann wird $\Gamma_H(a, b, \theta)$ gleich null sein, sobald $|\theta| > \sqrt{a}$ und fällt daher schnell mit $a \rightarrow 0$.
- Falls $\theta = 0$ und b nicht von der Form $(0, x_2)$ ist, dann fällt $\Gamma_H(a, b, \theta)$ schnell mit $a \rightarrow 0$;
- Falls $\theta = 0$ und b von der Form $(0, x_2)$ ist, dann fällt $\Gamma_H(a, b, \theta)$ wie $C \cdot a^{3/4}$.

Wiederum zeigt uns die Suche nach Orten in der (b, θ) -Ebene, an denen $\Gamma_H(a, b, \theta)$ langsam abfällt, mit $a \rightarrow 0$, genau die Orientierung der Singularitäten entlang der $x_1 = 0$ Geraden.

Bemerkung

Verleichen wir die letzten beiden Beispiele, so sehen wir, dass dort, wo der Abfall langsam ist, die *Rate* des Abfalls, die *Stärke* der Singularität anzeigt. Betrachten wir das asymptotische Verhalten der CCT für ν im Vergleich mit

dem von H , so ist für $(b, \theta) = ((0, x_2), 0)$ das Wachstum $\Gamma_\nu \sim C a^{-1/4}$ für $a \rightarrow 0$ gegenüber einem Abfall $\Gamma_H \sim C' a^{3/4}$; darin spiegelt sich wider, dass die Singularität von H schwächer ist, als die von ν . Rufen wir uns $\nu = \frac{\partial}{\partial x_1} H$ in Erinnerung, so steht die Differenz von 1 in den Exponenten der Abfallraten für $a \rightarrow 0$ im Einklang mit der intrinsischen 'Ordnung' der beiden Objekte, die sich um 1 unterscheiden muss (da $\frac{\partial}{\partial x_1}$ Ordnung 1 hat).

Polygonale Singularitäten

Betrachten wir nun die Funktion mit 'Eck'-Singularität $L(x) = 1_{\{x_1 \geq 0\}} 1_{\{x_2 \geq 0\}}$, welche aus linearen Singularitäten entlang der positiven x_1 und x_2 Achse, sowie einer Punktsingularität im Ursprung besteht. Die Fourier Transformierte von L ist von der Form $\hat{L}(\xi) = \frac{C}{\xi_1 \xi_2}$ bzw. in Polarkoordinaten

$$\hat{L}(r, \omega) = C r^{-2} \frac{1}{\cos(\omega) \sin(\omega)}.$$

Betrachten wir zuerst den Fall $b = 0$. Nach (4.22) ist, für $\theta \notin \{0, \pm \frac{\pi}{2}, \pi\}$,

$$\Gamma_L(a, 0, \theta) \sim C a^{2-3/4} \frac{1}{\cos(\omega) \sin(\omega)}, \quad a \rightarrow 0.$$

Ist θ eine der Achsenrichtungen, so erhalten wir, da $L \in L^\infty$,

$$\Gamma_L(a, 0, \theta) \sim C a^{3/2-3/4}, \quad a \rightarrow 0, \theta \in \{0, \pm \frac{\pi}{2}, \pi\}.$$

Falls $b \neq 0$ auf der positiven x_1 - oder x_2 -Achse liegt, so stimmt L lokal mit der Heaviside Funktion $1_{\{x_2 > 0\}}$ bzw. $1_{\{x_1 > 0\}}$ überein. Nach Lemma 4.13 fällt daher Γ_L mit der gleichen Geschwindigkeit wie die entsprechende Heaviside Funktion, woraus wir schließen, dass $\Gamma_L(a, b, \theta)$ schnell fallend ist, außer wenn $(b, \theta) = ((x_1, 0), \pm \pi/2)$ oder $((0, x_2), 0)$ oder $((0, x_2), \pi)$. In diesen Fällen gilt $\Gamma_L(a, b, \theta) \sim C' a^{3/4}$.

Schließlich erhalten wir für alle b , die nicht auf einer positiven Achse liegen, dass L lokal gleich einer konstanten Funktion ist und da für jedes $C \in \mathbb{R}$ gilt

$$\Gamma_C(a, b, \theta) = C \langle 1, \gamma_{ab\theta} \rangle = C \int \gamma_{ab\theta}(x) dx = C \hat{\gamma}_{ab\theta}(0) = 0,$$

da $0 \notin \text{supp } W$, ist auch $\Gamma_L(a, b, \theta)$ für solche b schnell fallend.

Zusammenfassend gilt daher

- Falls $b = 0, \theta \notin \{0, \pm \frac{\pi}{2}, \pi\}$, dann ist $\Gamma_L(a, b, \theta) = \mathcal{O}(a^{5/4})$.
- Falls $b = 0, \theta \in \{0, \pm \frac{\pi}{2}, \pi\}$, dann ist $\Gamma_L(a, b, \theta) = \mathcal{O}(a^{3/4})$.
- Falls $b \neq 0$ auf einer positiven Achse liegt und θ eine zur Singularität normale Richtung ist, so ist $\Gamma_L(a, b, \theta) = \mathcal{O}(a^{3/4})$.
- Andernfalls ist $\Gamma_L(a, b, \theta)$ schnell fallend.

Damit können wir uns nun allgemeinere 'Eck'-Singularitäten zuwenden, definiert durch Keile der Art

$$L_\theta(x) = 1_{\{e_{\theta_1}, x_1\} \geq 0} 1_{\{e_{\theta_2}, x_2\} \geq 0} \quad (4.23)$$

Die Analyse passiert ganz analog zum vorigen Fall, wobei etwa die positiven Achsen durch allgemeinere Strahlen ersetzt werden. Verschieben wir nun diesen Keil auch noch, sodass die Spitze in einem Punkt $b \neq 0$ liegt, so wird die Rolle von 0 vorhin, dann von b übernommen.

Betrachten wir nun die Indikatorfunktion eines Polygons P , so ist die lokale Situation, die eines Keiles der Form (4.23) und wir erhalten nur dann keinen raschen Abfall der CCT, wenn b einer der Eckpunkte ist, oder b auf einer Kante liegt und θ eine Normalenrichtung der Kante ist, wie für die Funktion L von oben.

Sei zum Beispiel S die Indikatorfunktion des Quadrates $-1 \leq x_1, x_2 \leq 1$. Dies ist die Summe von vier Translationen von L , etwa

$$\begin{aligned} S_1(x) &= 1_{\{x_1 \geq -1\}} 1_{\{x_2 \geq -1\}}, & S_2(x) &= -1_{\{x_1 \geq -1\}} 1_{\{x_2 \geq 1\}}, \\ S_3(x) &= -1_{\{x_1 \geq 1\}} 1_{\{x_2 \geq -1\}}, & S_4(x) &= 1_{\{x_1 \geq 1\}} 1_{\{x_2 \geq 1\}}. \end{aligned}$$

Daher wird $\Gamma_S(a, b, \theta)$ schnell fallend sein, wenn alle vier Summanden schnell fallend sind und wir erhalten daraus

- Liegt b nicht auf dem Rand des Quadrats, so ist $\Gamma_S(a, b, \theta)$ schnell fallend.
- Liegt b auf dem Rand des Quadrats, so treten zwei Fälle auf
 - Ist $b \in (\pm 1, \pm 1)$, so haben wir eine Abfallrate von $A(\theta) a^{5/4}$, wobei $A(\theta) = \frac{1}{\sin(\theta) \cos(\theta)}$, außer dort wo $|A| = \infty$ - in diesem Fall beträgt die Abfallrate $a^{3/4}$.
 - Ist b auf einer der Seiten des Quadrats, so haben wir schnellen Abfall, solange θ keine Normalenrichtung auf den Rand des Quadrats in b ist. Ansonsten beträgt die Abfallrate $a^{3/4}$.

In Tupeln (b, θ) abseits von den Positionen und Richtungen der Singularitäten finden wir also schnellen Abfall vor, hingegen tritt langsamer Abfall in allen Richtungen in den Eckpunkten auf und noch langsamerer Abfall auf den Seiten für Richtungen, die auf den Quadratseiten normal stehen. Wieder spiegelt sich die Stärke der Singularitäten in der Asymptotik für $a \rightarrow 0$ von $\Gamma_S(a, b, \theta)$ wider.

4.5 Curvelets und Mikrolokale Analysis

In diesem Abschnitt werden wir zeigen, dass wir anhand des asymptotischen Verhaltens der Curvelet Transformation für $a \rightarrow 0$ auf mikrolokale Eigenschaften der Funktion f rückschließen können. Konkret wird $\Gamma_f(a, b, \theta)$ für $a \rightarrow 0$ schnell fallend sein, außer wenn (b, θ) ein Element der Wave Front Set von f ist. Vorerst brauchen wir einige Resultate über das Verhalten der Transformation unter gewissen Voraussetzungen an die zu Grunde liegende Funktion. Im Anschluss werden wir zeigen, dass Γ_f genau dann in einer Umgebung von x_0 schnell fallend ist, wenn x_0 nicht im Singulären Träger von f liegt und diesen Beweis dann auf gewisse Winkelbereiche verfeinern um die entsprechende Aussage für die Wave Front Set zu erhalten.

Definiton 4.23

In Anlehnung an Definition 4.12, sagen wir, dass Γ_f nahe x_0 schnell fallend ist, wenn es eine Umgebung U von x_0 gibt, sodass $\Gamma_f(a, b, \theta)$ für $(b, \theta) \in U \times [-\pi - 1, \pi + 1]$ gleichmäßig schnell fallend ist.

Lemma 4.24

Ist g eine Funktion, deren Träger innerhalb einer Menge \mathcal{B} liegt, sodass $\|g\|_\infty \leq M$, dann gibt es für jedes $N > 2$ ein C_N , sodass

$$|\Gamma_g(a, b, \theta)| \leq C_N M a^{1/4} \lambda^{-N} \left(\frac{d(b, \mathcal{B})}{\sqrt{a}} \right).$$

Beweis

Es gilt

$$|\langle g, \gamma_{ab\theta} \rangle| \leq \|g\|_{L^\infty(\mathcal{B})} \|\gamma_{ab\theta}\|_{L^1(\mathcal{B})} \leq M \|\gamma_{ab\theta}\|_{L^1(\mathcal{B})}.$$

Aus Satz 4.11 verwenden wir, dass es zu jedem $N > 0$ ein C_N gibt, sodass

$$|\gamma_{ab\theta}(x)| \leq C_N a^{-3/4} \lambda^{-N} (|x - b|_{a,\theta}).$$

Setzen wir nun $\delta = d(b, \mathcal{B})$, so gilt unter Verwendung von Lemma 4.7, falls $N > 2$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} |\gamma_{ab\theta}(x)| dx &\leq C_N a^{-3/4} \int_{\mathcal{B}} \lambda^{-N} \left(\frac{|x - b|}{\sqrt{a}} \right) dx \\ &\leq C_N a^{-3/4} \int_{\{|y| \geq \delta\}} \lambda^{-N} \left(\frac{|y|}{\sqrt{a}} \right) dy \\ &\leq C_N a^{-3/4} \int_{\delta}^{\infty} \lambda^{-N} \left(\frac{r}{\sqrt{a}} \right) r dr \\ &\leq C_N a^{1/4} \int_{\delta/\sqrt{a}}^{\infty} \lambda^{-N}(s) s ds \\ &\leq C'_N a^{1/4} \lambda^{-N+2} (\delta/\sqrt{a}), \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt.

q.e.d.

Lemma 4.25

Sei g eine Funktion, deren Träger innerhalb einer Kreisscheibe B liegt, sodass $\|g\|_\infty \leq M$ und sei $(B^\eta)^c := \{x : d(x, B) > \eta\}$, sowie $\mathcal{T} \subset [-\pi - 1, \pi + 1]$. Dann ist die Funktion $\hat{g}_0(\xi)$ definiert durch

$$\hat{g}_0(\xi) = \int_0^{a_0} \int_{\mathcal{T}} \int_{(B^\eta)^c} \Gamma_g(a, b, \theta) \hat{\gamma}_{ab\theta}(\xi) d\mu$$

für $|\xi| \rightarrow \infty$ schnell fallend mit Konstanten, die nur von M und η abhängen.

Beweis

In Lemma 4.24 haben wir gezeigt, dass

$$|\Gamma_g(a, b, \theta)| \leq C_N M a^{1/4} \lambda^{-N} \left(\frac{d(b, \mathcal{B})}{\sqrt{a}} \right).$$

Schreiben wir wieder $\Xi(a, \theta)$ für den Träger von $\gamma_{ab\theta}$ (vgl. (4.8)), so folgt aus der Definition von $\hat{\gamma}_{ab\theta}$, dass es ein C gibt, sodass

$$|\hat{\gamma}_{ab\theta}(\xi)| \leq C a^{3/4} 1_{\Xi(a, \theta)}(\xi). \quad (4.24)$$

Daher gilt, mit ähnlichen Umformungen wie im Beweis von Lemma 4.24,

$$\begin{aligned} \int_{(B^\eta)^c} |\Gamma_g(a, b, \theta)| |\hat{\gamma}_{ab\theta}(\xi)| db &\leq C_N M C a \int_{(B^\eta)^c} \lambda^{-N} \left(\frac{d(b, \mathcal{B})}{\sqrt{a}} \right) 1_{\Xi(a, \theta)}(\xi) db \\ &= C'_N a \cdot 1_{\Xi(a, \theta)}(\xi) \cdot \int_{(B^\eta)^c} \lambda^{-N} \left(\frac{d(b, \mathcal{B})}{\sqrt{a}} \right) db \\ &\leq C'_N a \cdot 1_{\Xi(a, \theta)}(\xi) \cdot \int_\eta^\infty \lambda^{-N} \left(\frac{r}{\sqrt{a}} \right) r dr \\ &\leq C''_N a^2 \cdot 1_{\Xi(a, \theta)}(\xi) \cdot \lambda^{-N+2} \left(\frac{\eta}{\sqrt{a}} \right). \end{aligned}$$

Da $\int 1_{\Xi(a, \theta)}(\xi) d\theta = \int_{\omega-\sqrt{a}}^{\omega+\sqrt{a}} 1 d\theta = 2\sqrt{a}$, wobei $\omega = \arg(\xi)$, gilt

$$\begin{aligned} \int_0^{a_0} \int_{\mathcal{T}} a^2 \cdot 1_{\Xi(a, \theta)}(\xi) \cdot \lambda^{-N+2} \left(\frac{\eta}{\sqrt{a}} \right) d\theta da &\leq 2 \int_{1/(2|\xi|)}^{2/|\xi|} a^{5/2} \lambda^{-N+2} \left(\frac{\eta}{\sqrt{a}} \right) da \\ &\leq C |\xi|^{-7/2} \cdot \lambda^{-N+2} (\eta \sqrt{|\xi|/2}), \end{aligned}$$

wobei die letzte Abschätzung aus der Ableitung von $a^{7/2} \lambda^{-N} (\eta/\sqrt{a})$ nach a ersichtlich ist.

q.e.d.

Lemma 4.26

Sei $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^2$ eine kompakte Menge, $\mathcal{T} \subset [-\pi-1, \pi+1]$ sowie $\mathcal{Q} = (0, a_0] \times \mathcal{B} \times \mathcal{T}$. Ist $G(a, b, \theta)$ in \mathcal{Q} gleichmäßig schnell fallend mit $a \rightarrow 0$, dann ist die Funktion $\hat{g}_0(\xi)$ definiert durch

$$\hat{g}_0(\xi) = \int_0^{a_0} \int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{B}} G(a, b, \theta) \hat{\gamma}_{ab\theta}(\xi) d\mu$$

für $|\xi| \rightarrow \infty$ schnell fallend.

Beweis

Ist G in \mathcal{Q} gleichmäßig schnell fallend, so gilt für jedes N

$$\sup\{|G(a, b, \theta)| : (a, b, \theta) \in \mathcal{Q}\} \leq C_N a^N.$$

Daher und wegen (4.24), gilt mit $\omega = \arg(\xi)$

$$\begin{aligned}
 |\hat{g}_0(\xi)| &= \left| \int_{\mathcal{Q}} G(a, b, \theta) \hat{\gamma}_{ab\theta}(\xi) a^{-3} db d\theta da \right| \\
 &\leq C_N \int_{\mathcal{Q}} a^{3/4} 1_{\Xi(a, \theta)}(\xi) a^{N-3} db d\theta da \\
 &\leq C'_N \int_{1/(2|\xi|)}^{2/|\xi|} a^{N-9/4} \int_{\omega-\sqrt{a}}^{\omega+\sqrt{a}} 1 d\theta da \\
 &\leq C'_N \int_{1/(2|\xi|)}^{2/|\xi|} a^{N-7/4} da \\
 &\leq C''_N |\xi|^{-N+3/4}
 \end{aligned}$$

q.e.d.

Lemma 4.27

Sei $\varphi_0 \in C_0^\infty(B_1(0))$ und $\varphi(x) = \varphi_0\left(\frac{x-b}{\epsilon}\right)$. Dann gilt für $N > 0$:

(i) Falls $\sqrt{a}, \sqrt{a'} \leq \epsilon$,

$$|\langle \varphi \gamma_{ab\theta}, \gamma_{a'b'\theta'} \rangle| \leq C_N \lambda^{-N} \left(\frac{a}{a'}\right) \lambda^{-N} \left(\frac{a'}{a}\right) \lambda^{-N} \left(\frac{d(b, b')}{\sqrt{a}}\right) \lambda^{-N} \left(\frac{d(\theta, \theta')}{\sqrt{a}}\right)$$

(ii) Falls $a, \sqrt{a'} \leq \epsilon < \sqrt{a}$,

$$|\langle \varphi \gamma_{ab\theta}, \gamma_{a'b'\theta'} \rangle| \leq C_N \lambda^{-N} \left(\frac{a}{a'}\right) \lambda^{-N} \left(\frac{a'}{a}\right) \lambda^{-N} \left(\frac{d(b, b')}{\sqrt{a}}\right) \lambda^{-N} \left(\frac{d(\theta, \theta')}{\epsilon}\right)$$

(iii) Falls $\sqrt{a'} \leq \epsilon < a \leq a_0$,

$$|\langle \varphi \gamma_{ab\theta}, \gamma_{a'b'\theta'} \rangle| \leq C_N \lambda^{-N} \left(\frac{a'}{\epsilon}\right) \lambda^{-N} \left(\frac{d(b, b')}{\epsilon}\right)$$

Ohne Beweis.

Nach diesen Vorbereitungen formulieren wir nun die Kernaussagen dieses Abschnittes. Wir werden diese hier für den Fall, dass f eine beschränkte Funktion ist, $\|f\|_\infty \leq M$ beweisen. Die Beweise lassen sich mit modifizierten Abschätzungsstrategien auf allgemeine Distributionen ausweiten.

Satz 4.28

Sei f eine beschränkte Funktion mit $\|f\|_\infty \leq M$ und sei

$$\mathcal{R} = \{x_0 \in \mathbb{R}^2 : \Gamma_f(a, b, \theta) \text{ ist nahe } x_0 \text{ schnell fallend für } a \rightarrow 0\},$$

dann ist $\text{sing supp}(f)$ das Komplement von \mathcal{R} .

Beweis

Zuerst werden wir zeigen, dass die CCT abseits des Singulären Trägers schnell fallend ist. Sei also $x_0 \notin \text{sing supp } f$, dann existiert ein $\varphi \in C_0^\infty(B_{2\epsilon}(x_0))$ mit $\varphi = 1$ auf $B_\epsilon(x_0)$, sodass $\varphi f \in C^\infty$ und wir können schreiben

$$\Gamma_f(a, b, \theta) = \langle \varphi f, \gamma_{ab\theta} \rangle + \langle (1 - \varphi)f, \gamma_{ab\theta} \rangle. \quad (4.25)$$

Da $\varphi f \in C^\infty$ gilt nach Korollar 4.18, dass $\langle \varphi f, \gamma_{ab\theta} \rangle$ in b, θ gleichmäßig schnell fallend ist.

$(1 - \varphi)f$ hat Träger in $\mathcal{B} \subset (B_\epsilon(x_0))^c$ und daher gilt für $b \in B_{\epsilon/2}(x_0)$, dass $\delta := d(b, \mathcal{B}) > \epsilon/2 > 0$. Nach Lemma 4.24 ist nun für alle $(b, \theta) \in B_{\epsilon/2}(x_0) \times [-\pi - 1, \pi + 1]$

$$|\langle (1 - \varphi)f, \gamma_{ab\theta} \rangle| \leq C_N a^{1/4} \lambda^{-N} \left(\frac{\delta}{\sqrt{a}} \right) \leq C_N a^{(2N+1)/4} \delta^{-N}.$$

Da also beide Terme der rechten Seite von (4.25) gleichmäßig für $(b, \theta) \in B_{\epsilon/2}(x_0) \times (-\pi - 1, \pi + 1]$ schnell fallend sind, haben wir gezeigt, dass Γ_f nahe x_0 schnell fallend ist.

Nehmen wir nun an, dass Γ_f in der Nähe von x_0 schnell fallend ist. Es existiert dann eine Kugel $\mathcal{B} = B_{3\epsilon}(x_0)$, sodass der schnelle Abfall auf $(b, \theta) \in \mathcal{B} \times [-\pi - 1, \pi + 1]$ gleichmäßig ist. Wir wählen nun eine Funktion $\varphi \in C_0^\infty(\mathcal{B}_0)$, wobei $\mathcal{B}_0 = B_\epsilon(x_0)$ und setzen $\mathcal{B}_1 = B_{2\epsilon}(x_0)$.

Bezeichnen wir in der Reproduktionsformel (4.15) den Waveletanteil der Dekomposition einer Funktion f mit $P_0 f$ (vgl. den Beweis von Satz 4.14), so können wir die Fourier Transformierte von $g := \varphi f$ wie folgt zerlegen:

$$\widehat{\varphi f}(\xi) = \hat{g}(\xi) = \hat{g}_0(\xi) + \hat{g}_1(\xi) + \hat{g}_3(\xi),$$

wobei $\hat{g}_0(\xi) = P_0(\varphi f)^\wedge(\xi)$ und

$$\hat{g}_j(\xi) = \int_{\mathcal{Q}_j} \Gamma_g(a, b, \theta) \gamma_{ab\theta}(\xi) d\mu \quad j = 1, 2,$$

mit $\mathcal{Q}_1 := (0, a_0] \times \mathcal{B}_1 \times [-\pi - 1, \pi + 1]$ und $\mathcal{Q}_2 := (0, a_0] \times \mathcal{B}_1^c \times [-\pi - 1, \pi + 1]$.

Für \hat{g}_0 haben wir in (4.20) gesehen, dass $\hat{g}_0(\xi) = \widehat{\varphi f}(\xi) \hat{\phi}(\xi)^2$, wobei $\text{supp } \hat{\phi} \subset B_2$ nach (4.21). Daher ist \hat{g}_0 für $|\xi| \rightarrow \infty$ schnell fallend.

Da der Träger von $g = \varphi f$ in \mathcal{B}_0 enthalten ist, können wir \hat{g}_2 mit Lemma 4.25 abschätzen, da $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_0^c$ geeignet gewählt wurde und erhalten, dass auch \hat{g}_2 für $|\xi| \rightarrow \infty$ schnell fallend ist.

Es bleibt nur mehr zu zeigen, dass entsprechende Abschätzungen auch für \hat{g}_1 gelten. Wir werden dazu nachprüfen, dass die Voraussetzungen von Lemma 4.26 erfüllt sind und daraus die gewünschte Aussage erhalten. Konkret fehlt uns dafür noch, dass $\Gamma_g(a, b, \theta)$ in $\mathcal{B}_1 \times [-\pi - 1, \pi + 1]$ für $a \rightarrow 0$ schnell fallend ist. Diesen Term werden wir nun neuerlich in drei Teile aufspalten, indem wir – aus (4.15) angewandt auf f – die Zerlegung $f = f_0 + f_1 + f_2$ verwenden. Dabei ist $f_0 = P_0 f$ und – schreiben wir kurz $Q = (a, b, \theta)$ für Tupel von Level/Orten/Richtungen –

$$f_j(x) = \int_{\mathcal{Q}_j} \Gamma_f(Q) \gamma_Q(x) d\mu(Q), \quad j = 1, 2.$$

Damit folgt

$$\Gamma_g(Q) = \sum_{j=0}^2 \Gamma_{\varphi f_j}(Q).$$

$\widehat{P_0 f}$ hat kompakten Träger, somit ist $P_0 f$ glatt (vgl. Satz 1.28) und deshalb ist $\Gamma_{\varphi f_0}$ schnell fallend (vgl. Korollar 4.18).

Für den Beitrag von φf_1 gilt

$$\begin{aligned} \Gamma_{\varphi f_1}(Q) &= \langle \varphi f_1, \gamma_Q \rangle = \int \varphi(x) \left(\int_{\mathcal{Q}_1} \Gamma_f(Q') \gamma_{Q'}(x) d\mu(Q') \right) \bar{\gamma}_Q(x) dx \\ &= \int_{\mathcal{Q}_1} \Gamma_f(Q') \langle \varphi \gamma_{Q'}, \gamma_Q \rangle d\mu(Q'). \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung wissen wir bereits, dass $|\Gamma_f(a, b, \theta)| = \mathcal{O}(a^m)$ für alle $m > 0$ und gleichmäßig auf $\mathcal{B}_1 \times [-\pi - 1, \pi + 1]$. Unterteilen wir nun das Intervall $I = (0, a_0]$ in

$$I_0 = (0, \epsilon^2], \quad I_1 = (\epsilon^2, \epsilon] \quad \text{und} \quad I_2 = (\epsilon, a_0]$$

(wir erinnern daran, dass ϵ den Radius von \mathcal{B}_0 , dem Träger von φ , bezeichnet), so erhalten wir eine weitere Dekomposition $\mathcal{Q}_1 = \bigcup \mathcal{Q}_{1,k}$, wobei

$$\mathcal{Q}_{1,k} = I_k \times \mathcal{B}_1 \times [-\pi - 1, \pi + 1] \quad k = 1, 2, 3$$

und dementsprechend ist $\Gamma_{\varphi f_1} = G_{1,0} + G_{1,1} + G_{1,2}$. Auf feinen Levels $a \ll \epsilon^2$ wird der Hauptbeitrag zu $\Gamma_{\varphi f_1}$ von der Region $\mathcal{Q}_{1,0}$ geliefert, da nur diese ähnlich feine Skalen enthält. Aus Lemma 4.27(i) erhalten wir in diesem Gebiet

$$|\langle \varphi \gamma_{Q'}, \gamma_Q \rangle| \leq C_N \lambda^{-N} \left(\frac{a'}{a} \right) \lambda^{-N} \left(\frac{a}{a'} \right) \lambda^{-N} \left(\frac{d(b, b')}{\sqrt{a'}} \right) \lambda^{-N} \left(\frac{d(\theta, \theta')}{\sqrt{a}} \right).$$

Die Integrale bezüglich b' und θ' können wir gleichmäßig in $\mathcal{B}_1 \times [-\pi - 1, \pi + 1]$ abschätzen. So ist etwa für $N \geq 2$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi-1}^{\pi+1} \lambda^{-N} \left(\frac{d(\theta, \theta')}{\sqrt{a}} \right) d\theta' &\leq 2 \int_0^{2(\pi+1)} \left(\frac{a}{a+t^2} \right)^{N/2} dt \\ &\leq 2 \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+s^2} \right)^{N/2} ds \sqrt{a} \leq C_N, \end{aligned}$$

und die Analyse für das Integral bezüglich b' erfolgt ganz analog. Daher erhalten wir

$$\begin{aligned} |G_{1,0}(Q)| &\leq \int_{\mathcal{Q}_{1,0}} |\Gamma_f(Q')| |\langle \varphi \gamma_{Q'}, \gamma_Q \rangle| d\mu(Q') \\ &\leq C_{m,N} \int_0^{\epsilon^2} (a')^m \lambda^{-N} \left(\frac{a'}{a} \right) \lambda^{-N} \left(\frac{a}{a'} \right) \frac{da'}{a'^3}. \end{aligned}$$

Allgemein gilt $\lambda^{-1}(t)\lambda^{-1}(1/t) = \frac{|t|}{t^2+1}$ für $t \in \mathbb{R}$ und durch Substitution von

$t = \frac{a'}{a}$ folgt

$$\begin{aligned}
 |G_{1,0}(Q)| &\leq C \int_0^{\epsilon^2} (a')^m \lambda^{-N} \left(\frac{a'}{a} \right) \lambda^{-N} \left(\frac{a}{a'} \right) \frac{da'}{a'^3} \\
 &\leq C \int_0^{\epsilon^2/a} \frac{t^N}{(t^2+1)^N} (at)^{m-3} dt a \\
 &\leq C \int_0^\infty \frac{t^{N+m-3}}{(t^2+1)^N} dt a^{m-2}.
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

Dabei ist der Integrand für $N > 0$ von der Ordnung $\mathcal{O}(t^{-N+m-3})$, weswegen das Integral immer endlich ist, wenn $N > m - 2$ und $m \geq 2$. Wir erhalten, dass $G_{1,0}(Q)$ auf $\mathcal{B}_1 \times [-\pi - 1, \pi + 1]$ gleichmäßig schnell fallend ist. Mit den Aussagen aus 4.27(ii) und (iii) erhalten wir analoge Aussagen für $G_{1,1}(Q)$ und $G_{1,2}(Q)$, also ist $\Gamma_{\varphi_{f_1}}(Q)$ gleichmäßig schnell fallend.

Betrachten wir nun den Beitrag von φ_{f_2} ,

$$\Gamma_{\varphi_{f_2}}(Q) = \int_{\mathcal{Q}_2} \Gamma_f(Q') \langle \varphi_{\gamma_{Q'}}, \gamma_Q \rangle d\mu(Q').$$

Wir unterteilen \mathcal{B}_1^c in $\mathcal{Q}_{2,1} = \mathcal{B}^c$ und $\mathcal{Q}_{2,2} = \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_1$ und erhalten so $\Gamma_{\varphi_{f_2}}(Q) = G_{2,1} + G_{2,2}$. Für $G_{2,1}$ und $b \in \mathcal{B}_1$ erhalten wir – mit Umformungen wie im Beweis von Lemma 4.25 –

$$\int_{\mathcal{B}^c} \lambda^{-N} (d(b, b')/\sqrt{a}) db' \leq \int_\epsilon^\infty \lambda^{-N} (r/\sqrt{a}) r dr \leq C a \lambda^{-N+2} (\epsilon/\sqrt{a}). \tag{4.27}$$

Mit der Abschätzung aus Satz 4.11 erhalten wir für beschränktes f , dass Γ_f gleichmäßig mit $Ca^{3/4}$ beschränkt ist. Folglich ist $G_{2,1}(a, b, \theta)$ in $\mathcal{B}_1 \times [-\pi - 1, \pi + 1]$ gleichmäßig schnell fallend.

Was $G_{2,2}$ betrifft, so ist dort $b' \in \mathcal{B}$ und daher ist Γ_f in $\mathcal{Q}_{2,2}$ gleichmäßig schnell fallend und wir können die gleiche Analyse wiederholen, die uns zu (4.26) geführt hat und erhalten die gleiche Konklusion.

Damit haben wir für $\Gamma_{\varphi_{f_2}}(Q)$ gezeigt, dass die Funktion auf $\mathcal{B}_1 \times [-\pi - 1, \pi + 1]$ für $a \rightarrow 0$ gleichmäßig schnell fallend ist, wodurch Selbiges für $\Gamma_g(a, b, \theta)$ in $\mathcal{B}_1 \times [-\pi - 1, \pi + 1]$ gilt und die Voraussetzungen von Lemma 4.26 für \hat{g}_1 erfüllt sind. Es folgt die Behauptung.

q.e.d.

Satz 4.29

Sei $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ und sei

$$\mathcal{R}_0 = \{(x_0, \theta_0) \in T^*\mathbb{R}^2 : \Gamma_f(a, b, \theta) \text{ ist nahe } (x_0, \theta_0) \text{ schnell fallend für } a \rightarrow 0\},$$

dann ist $\text{WF}(f)$ das Komplement von \mathcal{R}_0 .

Beweis

Wir wiederholen den Beweis von Satz 4.28, wobei wir die Dekompositionen entsprechend anpassen, um die Lokalisierung in der Winkelvariable zu berücksichtigen. Ist etwa \mathcal{T}_1 eine Umgebung von θ_0 , so ist nun

$$\mathcal{Q}_1 := (0, a_0] \times \mathcal{B}_1 \times \mathcal{T}_1 \quad \text{und} \quad \mathcal{Q}_2 := (0, a_0] \times (\mathcal{B}_1 \times \mathcal{T}_1)^c.$$

Alle weiteren Zerlegungen werden dementsprechend adaptiert und die Resultate behalten ihre Gültigkeit. Auftretende Integrale von $\lambda^{-N}(d(\theta, \theta')/\sqrt{a})$ behandeln wir genau wie die entsprechenden Integrale von $\lambda^{-N}(d(b, b')/\sqrt{a})$ (vgl. etwa (4.15)), da die Terme von der gleichen Gestalt sind.

q.e.d.

Bemerkung

In Satz 3.24 haben wir gesehen, dass sich die Wave Front Set einer Distribution unter Anwendung eines Differentialoperators entlang der Bicharakteristischen Kurven ausbreitet. Der soeben bewiesene Satz sagt uns, dass wir auch auf die Distribution $a(x, D)f$ die CCT anwenden können und die Transformation wieder die neue Wave Front Set von $a(x, D)f$ anzeigt. Daraus folgt, dass sich auch die Curvelets unter Anwendung eines Operators $a(x, D)$ entlang der Bicharakteristischen Kurven des Hauptsymbols von a fortbewegen. Eine genaue Analyse dieses Umstandes findet sich in [CanDe].

4.6 Echte parabolische Skalierung

Wenn wir nun ein einzelnes 'Basiswavelet' φ nehmen, definieren wir ein affines System mittels

$$\varphi_{ab\theta} = \varphi(P_{a,\theta}(x - b)) \text{Det}(P_{a,\theta})^{1/2}.$$

Dabei handelt es sich um eine 'Wavelet Transformation' im eigentlichen Sinn, da eine Familie von affinen Transformationen auf einem einzelnen Wavelet operiert und so eine Familie von analysierenden Wavelets erzeugt. Schon aufgrund des zusätzlichen Richtungsparameters θ ist es allerdings kein Standardfall.

Diese Transformation wurde im Wesentlichen von Hart Smith in [S] behandelt, allerdings mit 2 unwesentlichen Unterschieden: erstens arbeitete er nicht mit einer Skalierung a und einer Richtung θ , sondern mit einer Frequenzvariable $\xi = a^{-1}e_\theta$ und zweitens verwendete er den L^1 Normalisierungsfaktor $\text{Det}(P_{a,\theta})$ anstatt des L^2 Normalisierungsfaktors $\text{Det}(P_{a,\theta})^{1/2}$ bei uns.

Diese Unterschiede sollen uns aber nicht weiter stören und wir definieren:

Definition 4.30

$$\bar{\Gamma}_f(a, b, \theta) = \langle f, \varphi_{ab\theta} \rangle, \quad a < a_0, b \in \mathbb{R}^2, \theta \in [-\pi - 1, \pi + 1] \quad (4.28)$$

heißt *gerichtete Wavelettransformation basierend auf affiner, parabolischer Skalierung* von Hart Smith.

Damit sind wir nun in der Lage diejenige Wavelettransformation zu definieren, die die gewünschte Ähnlichkeit zur CCT hat.

Definition und Lemma 4.31

Seien V und W , die Fensterfunktionen der CCT, aus C^∞ und sei das Basiswavelet der Smith Transformation so, dass es die Frequenzbereichsdarstellung

$$\hat{\varphi}_{a00}(\xi) = cW(a\xi_1) V\left(\frac{\xi_2}{\sqrt{a}\xi_1}\right) a^{3/4}, \quad a < \bar{a}_0$$

mit den gleichen Fenstern V und W hat, wobei c eine normalisierende Konstante und \bar{a}_0 das grösste Level der Transformation ist. Dann handelt sich bei dieser Konstruktion um echte affine Bilder eines einzigen erzeugenden Elements.

Beweis

Aufgrund der obigen Definition gilt: $\hat{\varphi}_{100}(\xi) = c W(\xi_1) V(\frac{\xi_2}{\xi_1})$. Und damit ist

$$\hat{\varphi}_{a00}(\xi_1, \xi_2) = \hat{\varphi}_{100}(a \xi_1, \sqrt{a} \xi_2) \cdot a^{3/4}. \quad (4.29)$$

q.e.d.

Dass diese Familie $(\varphi_{ab\theta})_{a,b,\theta}$ tatsächlich zu obiger Curveletfamilie $(\gamma_{ab\theta})_{a,b,\theta}$ äquivalent ist und welche Art von Äquivalenz vorliegt, werden wir im nächsten Kapitel noch genauer sehen.

Kapitel 5

Die diskrete Curvelet-Transformation

Wir werden nun eine diskretisierte Version der Curvelet Transformation Γ_f konstruieren. Dazu werden wir die stetige Transformation an geeigneten Stützstellen mit Skalen a_j , Richtungen $\theta_{j,l}$ und Positionen $b_{j,k,l}$ auswerten. Die Diskretisierung wird in zwei Schritten durchgeführt. Zuerst bilden wir eine semi-diskrete Transformation, die in der Ortsvariable b stetig bleibt, in den anderen beiden Variablen j, l aber diskretisiert ist. Wir werden zeigen, dass die so entstehende teilweise diskretisierte Transformation, für hochfrequente Funktionen exakte Rekonstruktion ermöglicht.

Anschließend diskretisieren wir in der Ortsvariable und erhalten eine Familie von Funktionen $(\phi_{jbl})_{j,b,l}$, die einen tight Frame bilden. Um genauere Aussagen über diesen Frame treffen zu können, werden wir zeigen, dass dieser sehr eng mit jenem Frame verwandt ist, der durch Diskretisierung aus der gerichteten Wavelettransformation von Hart-Smith entsteht, die in Abschnitt 4.6 beschrieben wurde.

Die in diesem Kapitel vorgestellte Diskretisierung und die präsentierten Resultate, stammen aus [CanDo2].

5.1 Diskretisierung

Definition 5.1

Sei $\tilde{a}_j^{1/2} = \frac{1}{2} 2^{-\lceil j/2 \rceil}$. Wir definieren

- $a_j = 2^{-j}, \quad j \geq 0$
- $\theta_{j,l} = l \pi \tilde{a}_j^{1/2}, \quad -L_j/2 \leq l \leq L_j/2$, wobei $L_j := 4 \cdot 2^{\lceil j/2 \rceil} + 2$
- Die Positionen b_k laufen durch ein von j, l abhängiges Netz

$$b_{j,k,l} = R_{\theta_{j,l}} D_{-j} k \tag{5.1}$$

wobei R_θ die ebene Rotation um θ Rad bezeichnet, sowie D_{-j} die Skalierungsmatrix

$$D_{-j} = \begin{pmatrix} 2^{-j} & 0 \\ 0 & 2^{-j/2} \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

und $k = (k_1, k_2)$ über \mathbb{Z}^2 läuft.

Außerdem wählen wir neuerlich Fenster-Funktionen $W(r)$ und $V(t)$, analog zu denen in der stetigen Transformation – beide sind reellwertige, nicht negative C^∞ Funktionen mit Träger in $(\frac{1}{2}, 2)$ beziehungsweise $[-1, 1]$. Weiters müssen sie die folgenden diskreten Zulässigkeitsbedingungen erfüllen:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} W^2(2^j r) = 1, \quad r > 0, \quad (5.3)$$

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} V^2(t - l) = 1, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (5.4)$$

Diese Bedingungen sind mit den Zulässigkeitsbedingungen (4.1) und (4.2) der stetigen Transformation kompatibel. Genauer heißt das, falls wir ein Fenster V haben, das die obige Bedingung (5.4) erfüllt, dann genügt es automatisch auch der stetigen Zulässigkeitsbedingung (4.2), während ein Fenster W , welches (5.3) genügt, bis auf eine Proportionalitätskonstante automatisch auch die stetige Bedingung (4.1) erfüllt:

$$\int W^2(ar) \frac{da}{a} = \log(2).$$

5.2 Die semi-diskrete Transformation

Wir definieren eine sem-diskrete Familie von Funktionen $\phi_{jbl}(x)$ analog zu unseren obigen Curvelets, für die eine Calderón-artige Reproduktionsformel existiert.

Definition 5.2

Das erzeugende Element eines Levels a_j definieren wir mittels eines Übergangs zu polaren Fourier-Koordinaten (r, ω) und setzen

$$\hat{\phi}_{j00}(r, \omega) = W(a_j r) V\left(\frac{\omega}{\pi a_j^{1/2}}\right) a_j^{3/4}, \quad j = 0, 1, \dots \quad (5.5)$$

Definition 5.3

Auf jedem Level a_j wird die Funktionenfamilie durch Translation und Rotation eines Basiselements ϕ_{j00} erzeugt:

$$\phi_{jbl}(x) = \phi_{j00}(R_{-\theta_{j,t}}(x - b)), \quad (5.6)$$

Offensichtlich sind diese Definitionen der analysierenden Elemente ganz analog zu denen der CCT, (4.3) und (4.4). Wieder sind diese Elemente keine echten parabolischen Skalierungen eines einzigen Wavelets. Man beachte, dass die Breite des Trägers von $\hat{\phi}_{jbl}$ in der Winkelvariable jetzt $\pi \cdot 2^{-\lceil j/2 \rceil}$ beträgt. Wir können nun die resultierende Transformation formal einführen.

Definition 5.4

Wir definieren die semi-diskrete Curvelet Transformation mittels

$$\tilde{\Gamma}_f(j, b, l) = \langle f, \phi_{jbl} \rangle. \quad (5.7)$$

Für diese Transformation gilt wieder eine exakte Rekonstruktionsformel für hochfrequente Funktionen, in Analogie zu Satz 4.15.

Satz 5.5

Sei $f \in L^2$ so, dass ihre Fourier Transformierte \hat{f} für $|\xi| < 2/a_0$ verschwindet. Dann gilt die Calderón-artige Reproduktionsformel

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=-L_j/2}^{L_j/2} \int \tilde{\Gamma}_f(j, b, l) \phi_{jbl}(x) \frac{db}{a_j^{3/2}},$$

und die Parseval-artige Formel

$$\|f\|_2^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=-L_j/2}^{L_j/2-1} \|\tilde{\Gamma}_f(j, \cdot, l)\|_2^2 a_j^{-3/2}.$$

Beweis

Da in der Ortsvariable b noch nicht diskretisiert wurde, können wir weite Teile dieses Beweises aus dem Beweis von Satz 4.15 übernehmen. Wir beginnen wieder damit den Beitrag eines Tupels (j, l) zu untersuchen, also diesmal die Funktion

$$g_{j,l}(x) = \int \langle f, \phi_{jbl} \rangle \phi_{jbl}(x) db \cdot a_j^{-3/2},$$

und erhalten

$$g_{j,l}(x) = \left((\phi_{j0l} \star \tilde{\phi}_{j0l}) \star f \right) (x) \cdot a_j^{-3/2}.$$

Weiters folgt daraus

$$\hat{g}_{j,l}(\xi) = \hat{\phi}_{j0l}(\xi)^2 \hat{f}(\xi) \cdot a_j^{-3/2} \quad (5.8)$$

und es genügt wiederum zu zeigen, dass

$$\hat{f}(\xi) = \sum_{j,l} \hat{g}_{j,l}(\xi) = \hat{f}(\xi) \cdot \sum_{j,l} |\hat{\phi}_{j0l}(\xi)|^2 \cdot a_j^{-3/2}.$$

Dies gilt genau dann, wenn für alle $\xi \in \text{supp } f$

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{j,l} |\hat{\phi}_{j0l}(\xi)|^2 \cdot a_j^{-3/2} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} W^2(a_j r) \sum_{l=-L_j/2}^{L_j/2} V^2\left(\frac{\omega - \theta_{j,l}}{\pi \tilde{a}_j^{1/2}}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} W^2(a_j r) \sum_{l=-L_j/2}^{L_j/2} V^2\left(\frac{\omega}{\pi \tilde{a}_j^{1/2}} - l\right), \end{aligned}$$

was aus den diskreten Zulässigkeitsbedingungen (5.3) und (5.4) folgt. In der Tat gilt für alle $\omega \in (-\pi, \pi]$

$$\frac{\omega}{\pi \tilde{a}_j^{1/2}} - L_j/2 = \frac{\omega}{\pi} 2^{1+\lceil j/2 \rceil} - (2^{1+\lceil j/2 \rceil} + 1) \leq -1$$

und

$$\frac{\omega}{\pi \tilde{a}_j^{1/2}} + L_j/2 = \frac{\omega}{\pi} 2^{1+\lceil j/2 \rceil} + 2^{1+\lceil j/2 \rceil} + 1 \geq 1,$$

wodurch

$$\sum_{l=-L_j/2}^{L_j/2} V^2\left(\frac{\omega}{\pi \tilde{a}_j^{1/2}} - l\right) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} V^2\left(\frac{\omega}{\pi \tilde{a}_j^{1/2}} - l\right) = 1.$$

Außerdem ist nach Voraussetzung $r = |\xi| \geq 2/a_0 = 2$ und für solche Werte von r ist $a_j r$ nur für positive j im Träger von W , weswegen gilt

$$\sum_{j=0}^{\infty} W^2(a_j r) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} W^2(a_j r) = 1.$$

Die Parseval-artige Formel erhalten wir dann aus

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &= \left\langle f, \sum_{j,l} \int \tilde{\Gamma}_f(j, b, l) \phi_{jbl}(x) \frac{db}{a_j^{3/2}} \right\rangle \\ &= \sum_{j,l} \int \overline{\tilde{\Gamma}_f(j, b, l)} \left(\int f(x) \bar{\phi}_{jbl}(x) dx \right) \frac{db}{a_j^{3/2}} \\ &= \sum_{j,l} \int |\tilde{\Gamma}_f(j, b, l)|^2 \frac{db}{a_j^{3/2}} = \sum_{j,l} \|\tilde{\Gamma}_f(j, \cdot, l)\|_2^2 a_j^{-3/2}. \end{aligned}$$

q.e.d.

5.3 Tight Frame

Aus Gründen der Vollständigkeit wiederholen wir kurz folgende

Definition 5.6 (Frame)

Eine Familie von Funktionen $(\varphi_j)_{j \in I}$ in einem Hilbertraum H heißt **Frame**, falls Konstanten $0 < A \leq B < \infty$ existieren, sodass für alle $f \in H$ gilt

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{j \in I} |\langle f, \varphi_j \rangle|^2 \leq B\|f\|^2.$$

Die Konstanten A, B heißen *Frame Bounds*. Falls $A = B$, so heißt das Frame *tight*.

Definition 5.7 (Frame Operator)

Sei $(\varphi_j)_{j \in I}$ ein Frame in H , dann ist der Frame Operator $\alpha : H \rightarrow l^2(I)$ definiert über

$$(\alpha(f))_j := \langle f, \varphi_j \rangle \quad (5.9)$$

Die Folge $(\langle f, \varphi_j \rangle)_{j \in I}$ heißt die *vom Frame erzeugte Koeffizientenfolge*.

Ist umgekehrt α eine Folge von Koeffizienten, so schreiben wir für die daraus durch Synthese entstehende Funktion

$$f(\alpha) := \sum_{j \in I} \alpha_j \varphi_j \quad (5.10)$$

Nehmen wir nun noch den letzten Schritt und wählen Stützpunkte für die Ortsvariable der semi-diskreten Dekomposition, so erhalten wir eben ein tight Frame. Die Notation missbrauchend, werden wir für die entsprechenden Frame Elemente wieder ϕ schreiben. Damit sei

$$\phi_{jkl}(x) = \phi_{j,b_{j,k,l},l}(x). \quad (5.11)$$

Die Frame Koeffizienten sind dann gegeben durch

$$\alpha_{jkl} = \tilde{\Gamma}_f(j, b_{j,k,l}, l) = \langle f, \phi_{jkl} \rangle \quad (5.12)$$

für $j \geq 0$, $\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2$ und $-L_j/2 \leq l \leq L_j/2$, wobei die $b_{j,k,l}$ wie in (5.1) sind.

Satz 5.8

Sei f eine reell-wertige Funktion in $L^2(\mathbb{R}^2)$. Dann gilt

$$f(x) = \sum_{j,k,l} \alpha_{jkl} \phi_{jkl}(x),$$

in einem L^2 -Sinn, und

$$\|f\|_2^2 = \sum_{j,k,l} |\alpha_{jkl}|^2.$$

Beweis

Der Beweis besteht darin zu zeigen, dass die Funktionen $g_{j,l}$ aus dem Beweis von Satz 5.5,

$$g_{j,l}(x) = \int \langle f, \phi_{jbl} \rangle \phi_{jbl}(x) db \cdot a_j^{-3/2},$$

darstellbar sind als

$$g_{j,l}(x) = \sum_k \langle f, \phi_{jkl} \rangle \phi_{jkl}(x) \quad (5.13)$$

Die Behauptung folgt dann aus der Reproduktionsformel der semi-diskreten Transformation. Aus Gleichung (5.8) wissen wir, dass

$$\hat{g}_{j,l}(\xi) = |\hat{\phi}_{j0l}(\xi)|^2 \hat{f}(\xi) \cdot a_j^{-3/2}.$$

Es genügt zu zeigen, dass die Fourier Transformation der rechten Seite von (5.13) damit übereinstimmt. Sei R_θ die Matrix aus (4.5) und D_j jene aus (5.2), so gilt, da $\hat{\phi}_{j0l}$ reell-wertig ist,

$$\begin{aligned} \langle f, \phi_{jkl} \rangle &= (2\pi)^{-2} \langle \hat{f}, \hat{\phi}_{jkl} \rangle \\ &= (2\pi)^{-2} \int \hat{f}(\xi) \hat{\phi}_{j0l}(\xi) e^{i\langle b_{j,k,l}, \xi \rangle} d\xi \\ &= (2\pi)^{-2} \int \hat{f}(\xi) \hat{\phi}_{j0l}(\xi) e^{i\langle k, D_{-j} R_{-\theta_{j,l}} \xi \rangle} d\xi \\ &= (2\pi)^{-2} \int \hat{f}(-R_{\theta_{j,l}} D_j \eta) \hat{\phi}_{j0l}(-R_{\theta_{j,l}} D_j \eta) e^{-i\langle k, \eta \rangle} |\det(D_j)| d\eta \\ &= (2\pi)^{-1} \langle h, \frac{e^{i\langle k, \cdot \rangle}}{2\pi} \rangle a_j^{-3/2}, \end{aligned}$$

wobei die Funktion h gegeben ist durch

$$h(\xi) = \hat{\phi}_{j0l}(-R_{\theta_{j,l}} D_j \xi) \hat{f}(-R_{\theta_{j,l}} D_j \xi).$$

Eine notwendige Bedingung für $(-\xi) \in \text{supp } h$ ist daher, dass $R_{\theta_{j,l}} D_j \xi \in \text{supp}(\hat{\phi}_{j0l})$. Außerdem ist

$$\hat{\phi}_{j0l}(\xi) = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} \phi_{j00}(R_{-\theta_{j,l}} x) dx = \hat{\phi}_{j00}(R_{-\theta_{j,l}} \xi),$$

weswegen die vorige Bedingung mit $D_j \xi \in \text{supp } \hat{\phi}_{j00}$ gleichbedeutend ist. Wenden wir die Analyse aus dem Beweis von Lemma 4.5 auf die diskreten Basiscurvelets, definiert in (5.5) an, so erhalten wir, dass insbesondere gilt

$$\text{supp } \hat{\phi}_{j00} \subset [-2^j \pi, 2^j \pi] \times [-2^{j/2} \pi, 2^{j/2} \pi].$$

Daher ist in Summe $\text{supp } h \subset [-\pi, \pi]^2$, also $h \in L^2([-\pi, \pi]^2)$. Da die Familie

$$\left\{ \frac{e^{i\langle k, \cdot \rangle}}{2\pi} : k \in \mathbb{Z}^2 \right\}$$

eine Orthonormalbasis von $L^2([-\pi, \pi]^2)$ ist, folgt

$$\begin{aligned} \left(\sum_k \langle f, \phi_{jkl} \rangle \phi_{jkl} \right)^\wedge(\xi) &= \sum_k \langle f, \phi_{jkl} \rangle \hat{\phi}_{jkl}(\xi) \\ &= \sum_k \langle h, \frac{e^{i\langle k, \cdot \rangle}}{2\pi} \rangle \frac{e^{-i\langle b_{j,k,l}, \xi \rangle}}{2\pi} \hat{\phi}_{j0l}(\xi) a_j^{-3/2} \\ &= h(-D_{-j} R_{-\theta_{j,l}} \xi) \hat{\phi}_{j0l}(\xi) a_j^{-3/2} \\ &= |\hat{\phi}_{j0l}(\xi)|^2 \hat{f}(\xi) a_j^{-3/2}. \end{aligned}$$

Wie schon zuvor erhalten wir die Parseval-artige Formel durch Substitution der Reproduktionsformel, also

$$\|f\|_2^2 = \langle f, \sum_{j,k,l} \alpha_{jkl} \phi_{jkl}(x) \rangle = \sum_{j,k,l} \bar{\alpha}_{jkl} \langle f, \phi_{jkl} \rangle = \sum_{j,k,l} |\alpha_{jkl}|^2.$$

q.e.d.

Die Abbildung 5.1 zeigt die Stützpunkte des Netzes der $b_{j,k,l}$ jeweils für alle $(k_1, k_2) \in \{-2, \dots, 2\} \times \{-2, \dots, 2\}$. In jeder Zeile der Grafik wird das Ausgangsnetz ($l = 0$) eines Levels j , sowie die erste Rotation ($l = 1$) davon gezeigt. Für die weiteren Werte von l verlaufen die Drehungen analog weiter.

Auf dem ersten Level $j = 0$ geht das Netz bei Drehung noch in sich selbst über, da die Punkte hier in beiden Richtungen äquidistant liegen und alle auftretenden Winkel Vielfache von $\frac{\pi}{2}$ sind.

Für größere Werte von j bemerken wir jedoch, dass die Ortsdiskretisierung für verschiedene Richtungen verschiedene rechteckige Netze (Stützpunkte) und verschieden Abstände in den beiden orthogonalen Richtungen verwendet, in Übereinstimmung mit parabolischer Skalierung.

Bemerkung

In vielerlei Hinsicht sind Γ und $\tilde{\Gamma}$ tatsächlich äquivalent. Allerdings gibt es schon zwei wichtige Unterschiede: zum Ersten, wie schon zuvor erwähnt, unterliegt das Fenster W der diskreten Transformation einer etwas anderen Normalisierungsbedingung als das der stetigen. Wir können also bestenfalls erwarten, dass $\Gamma \propto \tilde{\Gamma}$. Zweitens, und wesentlich schwerwiegender, $\tilde{\Gamma}$ wird in der polaren Variable des Arguments mit $\tilde{a}_j^{1/2}$ gestreckt, anstatt mit $a_j^{1/2}$. Für gerade Werte von j sind diese beiden Größen ident, nicht jedoch für ungerade j . Eine mögliche Betrachtungsweise hierfür ist die Folgende. Es ist so, als ob wir zwei verschiedene stetige Transformationen $\Gamma^1(a, b, \theta)$ und $\Gamma^2(a, b, \theta)$ hätten, wobei $\Gamma^1 = \Gamma$, wie bisher diskutiert, wo hingegen Γ^2 auf einem Winkelfenster $V_2(\cdot) = V(\sqrt{2} \cdot)$. Somit verwendet also Γ^2 ein etwas anderes erzeugendes Curvelet auf jedem Level als Γ^1 . Wir erhalten daher für geeignete Konstanten c_i

$$\tilde{\Gamma}(j, k, l) = \begin{cases} c_1 \Gamma^1(a_j, b_{j,k,l}, \theta_{j,l}) & j \text{ gerade} \\ c_2 \Gamma^2(a_j, b_{j,k,l}, \theta_{j,l}) & j \text{ ungerade} \end{cases}$$

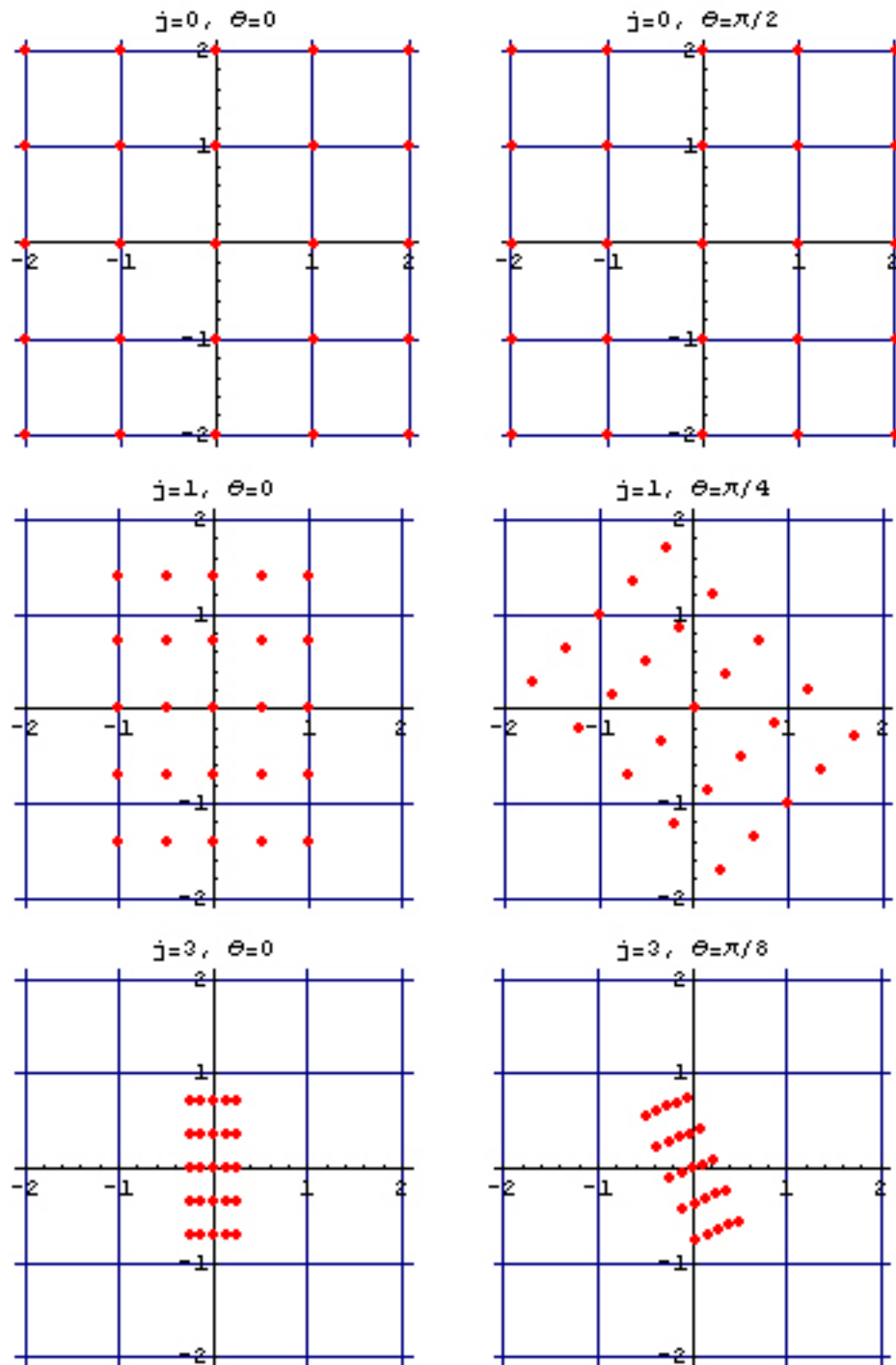
5.4 Vergleich von Frames

In diesem Kapitel werden wir sehen, in welchem Sinn dieser Curvelet Frame 'auf feinen Level' einem System von Wavelets, die durch eine affine Variablentransformation eines einzelnen Mutterwavelets gewonnen wurden, ähnlich ist. Wir betrachten also ein Curvelet in Standardposition und Standardorientierung: $k = 0$ und $l = 0$. Im Fourierbereich ist dieses gegeben durch:

$$\hat{\phi}_{j00}(r, \omega) = W(a_j r) V\left(\frac{\omega}{\pi \tilde{a}_j^{1/2}}\right) a_j^{3/4}$$

Man definiert nun das entsprechende Wavelet basierend auf echter parabolischer Skalierung, also *ohne Verwendung von Polarkoordinaten*:

$$\hat{\varphi}_{j00}(\xi) = W(a_j \xi_1) V\left(\frac{\xi_2}{\xi_1} \frac{1}{\pi \tilde{a}_j^{1/2}}\right) a_j^{3/4} \quad (5.14)$$

Abbildung 5.1: Stützpunktgitter der $b_{j,k,l}$

Bemerkung

Um zu zeigen, dass die erzeugenden Elemente auf den einzelnen Level auseinander hervorgehen, kann man die Transformation aus Gleichung (4.29) hier leicht adaptieren:

$$\hat{\varphi}_{j00}(\xi_1, \xi_2) = \hat{\varphi}_{100}(a_j \xi_1, \frac{a_j}{\tilde{a}_j^{1/2}} \xi_2) \cdot a_j^{3/4}.$$

So ein Zusammenhang kann für die Curvelet Familie nicht bestehen, da das erzeugende Element auf jedem Level leicht unterschiedlich ist.

Satz 5.9

Ξ_j bezeichne den Träger von $\hat{\varphi}_{j00}$. Es gilt

$$(i) \quad \left\| \frac{r}{\xi_1} - 1 \right\|_{L^\infty(\Xi_j)} \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty$$

$$(ii) \quad \left\| \frac{\xi_2/\xi_1}{\omega} - 1 \right\|_{L^\infty(\Xi_j)} \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty$$

Beweis

Im ersten Teil des Satzes ist

$$\frac{r}{\xi_1} = \frac{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}}{\xi_1} = \sqrt{1 + \left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)^2}$$

und somit

$$\begin{aligned} \left\| \frac{r}{\xi_1} - 1 \right\|_{L^\infty(\Xi_j)} &= \sup_{(\xi_1, \xi_2) \in \Xi_j} \left| \sqrt{1 + \left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)^2} - 1 \right| \\ &= \left| \sqrt{1 + (\tan(\pi \tilde{a}_j^{1/2}))^2} - 1 \right|. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Die letzte Identität kommt von Gleichung (4.8), angewandt auf die diskrete Transformation, denn der Ausdruck (5.15) hängt von $\sup_{(\xi_1, \xi_2) \in \Xi_j} \left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)^2 = (\tan(\pi \tilde{a}_j^{1/2}))^2$, dem Tangens des 'Öffnungswinkels' von Ξ_j (s. Abbildung 4.1), ab. Da mit $\tilde{a}_j^{1/2} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$, auch $\tan(\pi \tilde{a}_j^{1/2}) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ folgt (i).

Grob gesprochen gilt dieser erste Teil der Aussage, weil für große j , im - naddelförmig um die erste Achse liegenden - Träger Ξ_j , der Beitrag von ξ_2 zum polaren Radius r vernachlässigbar ist.

Aus ähnlichen Überlegungen folgt ebenso für (ii)

$$\frac{\xi_2/\xi_1}{\omega} = \frac{\tan \omega}{\omega}$$

Da die möglichen Werte für ω mit steigendem j immer näher bei 0 liegen und $\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\tan \omega}{\omega} = 1$ ist der Satz bewiesen.

q.e.d.

Wir sehen die Situation von Satz 5.9 in Abbildung 5.2 veranschaulicht. Es wird dabei die "Differenz" der Träger von $\hat{\phi}_{j00}$ und $\hat{\varphi}_{j00}$ am Beispiel $j = 1$ dargestellt. Jene Bereiche, die zu $\text{supp } \hat{\phi}_{j00}$ gehören, nicht aber zu $\text{supp } \hat{\varphi}_{j00}$ werden dabei grau dargestellt, für die schwarze Fläche gilt die umgekehrte Zugehörigkeit. Mit wachsendem j werden beide Flächen zunehmend kleiner, was genau der Aussage des Satzes entspricht.

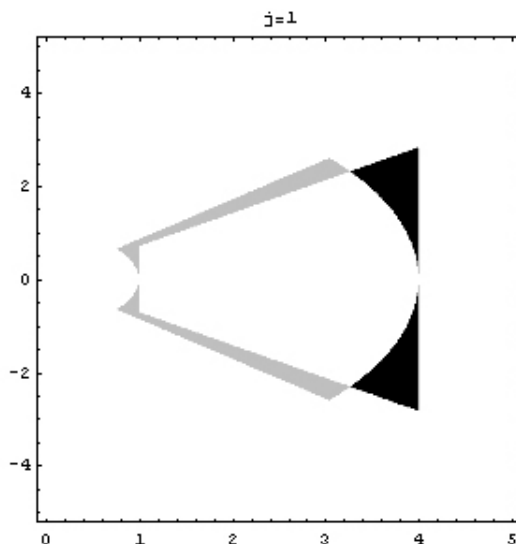


Abbildung 5.2: Differenz von $\text{supp } \hat{\phi}_{j00}$ und $\text{supp } \hat{\varphi}_{j00}$

Korollar 5.10

$$0 = \lim_{J \rightarrow \infty} \sup_{j \geq J} \sup_{k,l} \|\phi_{jkl} - \varphi_{jkl}\|_2$$

In diesem Sinne sagen wir, dass die Familien $(\phi_{jkl})_{j,k,l}$ und $(\varphi_{jkl})_{j,k,l}$ auf feinen Level äquivalent sind.

Beweis

Aufgrund der Glattheit von V und W und der Aussage des vorigen Satzes sehen wir, dass sich die beiden Familien mit steigendem J elementweise immer genauer entsprechen. Daraus folgt sofort die Behauptung.

q.e.d.

Um zu sehen, dass noch eine viel stärkere Übereinstimmung vorliegt, vorerst folgende

Definition 5.11

Wir schreiben Φ für den Curvelet Frame, $\Phi = \{\phi_{jkl}\}$, und definieren das zusammengesetzte System Φ_J so, dass es für grobe Skalen Elemente des Curvelet

Frames benutzt, aber auf feineren Skalen Elemente, die echte parabolische Skalierung sind:

$$\Phi_J = \{\phi_{jkl} : j \leq J\} \cup \{\varphi_{jkl} : j > J\}$$

Notation

Der Einfachheit halber schreiben $Q = (j, k, l)$ für ein Level/Position/Orientierung Tripel. Weiters werden wir für die Elemente von Φ_J kurz ψ_Q schreiben und meinen damit, dass $\psi_Q = \phi_Q$ falls $j \leq J$ und $\psi_Q = \varphi_Q$ falls $j > J$.

Definition 5.12

Die Gram Matrix des Frames Φ ist definiert durch

$$M^\#(Q, Q') = \langle \phi_{Q'}, \phi_Q \rangle$$

und die 'Cross-Frame' Matrix B_J durch

$$B_J(Q, Q') = \langle \psi_{Q'}, \phi_Q \rangle.$$

Lemma 5.13

$M^\#$ ist hermitesch und idempotent, das heißt

$$M^\# = (M^\#)^H \quad \text{und} \quad (M^\#)^2 = M^\#, \quad (5.16)$$

wobei M^H die hermitesch Transponierte der Matrix M bezeichnet (vgl. Definition 1.43). Außerdem kommutieren die Matrizen $B_J B_J^H$ und $M^\#$,

$$M^\#(B_J B_J^H) = (B_J B_J^H) M^\# \quad (5.17)$$

Beweis

Durch die Bildung der hermitesch Transponierten $(M^\#)^H$ wird jeder Eintrag $\langle \phi_Q, \phi_{Q'} \rangle$ durch $\overline{\langle \phi_{Q'}, \phi_Q \rangle}$ ersetzt. Da $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt ist, sind diese beiden Ausdrücke ident.

Die anderen beiden Behauptungen folgen aus der Tatsache, dass es sich bei Φ um ein tight Frame handelt (vgl. Satz 5.8). Es gilt daher

$$\begin{aligned} (M^\#)^2(Q, Q'') &= \sum_{Q'} \langle \phi_{Q'}, \phi_Q \rangle \langle \phi_{Q''}, \phi_{Q'} \rangle \\ &= \left\langle \sum_{Q'} \langle \phi_{Q''}, \phi_{Q'} \rangle \phi_{Q'}, \phi_Q \right\rangle \\ &= \langle \phi_{Q''}, \phi_Q \rangle = M^\#(Q, Q''), \end{aligned}$$

was (5.16) beweist. Die Darstellung von B_J^H ist $B_J^H(Q, Q') = \overline{\langle \psi_Q, \phi_{Q'} \rangle} = \langle \phi_{Q'}, \psi_Q \rangle$ und wir erhalten

$$\begin{aligned} M^\#(B_J B_J^H)(Q, Q') &= \sum_{Q''} \sum_{Q'''} \langle \phi_{Q''}, \phi_Q \rangle \langle \psi_{Q'''}, \phi_{Q''} \rangle \langle \phi_{Q'}, \psi_{Q'''} \rangle \\ &= \sum_{Q'''} \langle \sum_{Q''} \langle \psi_{Q'''}, \phi_{Q''} \rangle \phi_{Q''}, \phi_Q \rangle \langle \phi_{Q'}, \psi_{Q'''} \rangle \\ &= \sum_{Q'''} \langle \psi_{Q'''}, \phi_Q \rangle \langle \phi_{Q'}, \psi_{Q'''} \rangle \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (B_J B_J^H) M^\#(Q, Q') &= \sum_{Q''} \sum_{Q'''} \langle \psi_{Q''}, \phi_Q \rangle \langle \phi_{Q'''}, \psi_{Q''} \rangle \langle \phi_{Q'}, \phi_{Q'''} \rangle \\ &= \sum_{Q''} \langle \psi_{Q''}, \phi_Q \rangle \langle \sum_{Q'''} \langle \phi_{Q'}, \phi_{Q'''} \rangle \phi_{Q'''}, \psi_{Q''} \rangle \\ &= \sum_{Q''} \langle \psi_{Q''}, \phi_Q \rangle \langle \phi_{Q'}, \psi_{Q''} \rangle, \end{aligned}$$

woraus unmittelbar (5.17) folgt.

q.e.d.

Bemerkung

Laut Definition 1.45 ist $M^\#$ eine Projektion.

5.5 Sparsity der Gram Matrizen

Aus den folgenden beiden Aussagen geht hervor, dass die Gram Matrix $M^\#$ und die Cross-Frame Matrix B_J sparse sind (vgl. Abschnitt 1.8).

Lemma 5.14

Für jedes $N \in \mathbb{N}$ existiert eine Konstante C_N , sodass

$$|\langle \phi_{j'00}, \phi_{jkl} \rangle| \leq C_N 1_{\{|j-j'| \leq 1\}} 1_{\{|l| \leq 2\}} \lambda^{-N} (|b_{j,k,l}|_{a_j,0}) \quad (5.18)$$

für alle j, j', k, l .

Beweis

Aus der Formel von Parseval (vgl. Satz 1.26) und der Darstellung der Curvelets aus (4.6), ergibt sich

$$\begin{aligned} \langle \phi_{j'00}, \phi_{jkl} \rangle &= (2\pi)^{-2} \langle \hat{\phi}_{j'00}, \hat{\phi}_{jkl} \rangle \\ &= (2\pi)^{-2} \int e^{-i\langle \xi, b_{j,k,l} \rangle} \hat{f}_{j',j,l}(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (5.19)$$

wobei (r, ω) wieder die Polarkoordinaten von ξ bezeichnen und

$$\hat{f}_{j',j,l}(\xi) = W(a_j r) V\left(\frac{\omega}{\pi \tilde{a}_{j'}^{1/2}}\right) W(a_j r) V\left(\frac{\omega - \theta_{j,l}}{\pi \tilde{a}_j^{1/2}}\right) (a_{j'} a_j)^{3/4}.$$

Daher ist $\langle \phi_{j'00}, \phi_{jkl} \rangle = 0$, falls $\text{supp } \hat{f}_{j',j,l} = \emptyset$. Nun kann ξ nur innerhalb des Trägers von $\hat{f}_{j',j,l}$ liegen, wenn

$$r \in \left(\frac{1}{2a_{j'}}, \frac{2}{a_{j'}}\right) \cap \left(\frac{1}{2a_j}, \frac{2}{a_j}\right)$$

und

$$\omega \in [-\pi \tilde{a}_{j'}^{1/2}, \pi \tilde{a}_{j'}^{1/2}] \cap [\theta_{j,l} - \pi \tilde{a}_j^{1/2}, \theta_{j,l} + \pi \tilde{a}_j^{1/2}].$$

Ist also eine dieser Mengen leer, so ist auch $\text{supp } \hat{f}_{j',j,l} = \emptyset$. Dies ist dann der Fall, wenn eine der folgenden Ungleichungen erfüllt ist

$$\begin{aligned} \frac{2}{a_{j'}} &\leq \frac{1}{2a_j}, & \frac{2}{a_j} &\leq \frac{1}{2a_{j'}}, \\ \pi \tilde{a}_{j'}^{1/2} &< \theta_{j,l} - \pi \tilde{a}_j^{1/2}, & \theta_{j,l} + \pi \tilde{a}_j^{1/2} &< -\pi \tilde{a}_{j'}^{1/2}. \end{aligned}$$

oder zusammengefasst, wenn

$$a_{j'} \notin \left(\frac{a_j}{4}, 4a_j\right) \quad \text{oder} \quad |\theta_{j,l}| \geq \pi (\tilde{a}_j^{1/2} + \tilde{a}_{j'}^{1/2}).$$

Per Definition ist $a_j = 2^{-j}$ und daher können wir zwei Fälle beschreiben, die garantieren, dass $\langle \phi_{j'00}, \phi_{jkl} \rangle = 0$.

- (i) $2^{-j'} \notin (2^{2-j}, 2^{2+j})$, was genau dann gilt, wenn $|j - j'| \geq 2$.
- (ii) $|j - j'| \leq 1$ und $|\theta_{j,l}| \geq \pi (\tilde{a}_j^{1/2} + \tilde{a}_{j'}^{1/2})$, was insbesondere erfüllt ist, falls $|\theta_{j,l}| \geq 3\pi \tilde{a}_j^{1/2}$ also $|l| \geq 3$, da für $|j - j'| \leq 1$ die Abschätzung $\tilde{a}_{j'}^{1/2} \leq 2\tilde{a}_j^{1/2}$ gilt.

Somit sind die Wirkungen der charakteristischen Funktionen in der Aussage bewiesen.

Um den Abfall in der Norm $|b_{j,k,l}|_{a_j,0}$ zu erhalten, weisen wir zuerst darauf hin, dass aus der Darstellung (5.19) unmittelbar folgt, dass

$$\langle \phi_{j'00}, \phi_{jkl} \rangle = \tilde{f}_{j',j,l}(b_{j,k,l}).$$

Außerdem ist der Träger von $\hat{f}_{j',j,l}$ insbesondere im Träger von $\phi_{j'00}$ enthalten, der wiederum in einem Rechteck der Dimension $a_{j'} \times \tilde{a}_{j'}^{1/2}$ Platz hat (vgl. Lemma 4.5). Es bleibt nur zu zeigen, dass auch die skalierte C^∞ Funktion

$$\hat{g}_{j',j,l}(\xi) = \hat{f}_{j',j,l}(D_{1/a}\xi) a_{j'}^{-3/2}$$

beschränkte C^m Normen hat, damit die Voraussetzungen von Lemma 4.10, welches die Behauptung liefert, erfüllt sind. Da $|j - j'| \leq 1$ kann der resultierende Faktor $a_{j'}^{-3/4} a_j^{3/4}$ in $\hat{g}_{j',j,l}$ durch eine Konstante C unabhängig von j abgeschätzt werden. Somit wird $\hat{g}_{j',j,l}$ von einer C^∞ Funktion \hat{g} dominiert, deren Werte und Ableitungen ausschließlich von W und V abhängen und für die daher Konstanten ρ_m existieren, die auch für alle $\hat{g}_{j',j,l}$ gelten.

q.e.d.

Bemerkung

Aufgrund von der in Satz 5.9 gezeigten Äquivalenz von $\hat{\phi}_{j00}$ und $\hat{\varphi}_{j00}$, die in Abbildung 5.2 veranschaulicht wird, können die selben Überlegungen für die Skalarprodukte $\langle \varphi_{j'00}, \phi_{jkl} \rangle$ angestellt werden, unter entsprechender Anpassung der charakteristischen Funktion für j, j' . Auch die Behauptungen über die C^m Normen verlaufen analog. Es gibt dann entsprechende Konstanten C_N , sodass

$$|\langle \psi_{j'00}, \phi_{jkl} \rangle| \leq C_N \mathbf{1}_{\{|j-j'| \leq 2\}} \mathbf{1}_{\{|l| \leq 2\}} \lambda^{-N} (|b_{j,k,l}|_{a_j,0}) \quad (5.20)$$

für alle j, j', k, l .

Lemma 5.15

Für jedes $N \in \mathbb{N}$ existiert eine Folge $\epsilon_{N,j'}$, die für $j \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert, sodass

$$|\langle \phi_{j'00} - \varphi_{j'00}, \phi_{jkl} \rangle| \leq \epsilon_{N,j'} \mathbf{1}_{\{|j-j'| \leq 2\}} \mathbf{1}_{\{|l| \leq 3\}} \lambda^{-N} (|b_{j,k,l}|_{a_j,0}) \quad (5.21)$$

für alle j, j', k, l .

Beweisskizze

Die Argumentation verläuft ähnlich wie in Satz 5.14. Diesmal ist

$$|\langle \phi_{j'00} - \varphi_{j'00}, \phi_{jkl} \rangle| = (2\pi)^{-2} \int e^{-i\langle \xi, b_{j,k,l} \rangle} \hat{f}_{j',j,l}(\xi) d\xi,$$

wobei

$$\begin{aligned} \hat{f}_{j',j,l}(\xi) = & \left(W(a_{j'}r) V \left(\frac{\omega}{\pi \tilde{a}_{j'}^{1/2}} \right) - W(a_{j'}\xi_1) V \left(\frac{\xi_2}{\xi_1 \pi \tilde{a}_{j'}^{1/2}} \right) \right) \\ & W(a_j r) V \left(\frac{\omega - \theta_{j,l}}{\pi \tilde{a}_j^{1/2}} \right) (a_{j'} a_j)^{3/4}. \end{aligned}$$

Wieder können wir die charakteristischen Funktionen aus den Trägern der beteiligten Fensterfunktionen herleiten, Konstanten für die C^m Normen der skalierten Funktionen $\hat{g}_{j',j,l}$ finden und Lemma 4.10 anwenden. Die Existenz einer Nullfolge $\epsilon_{N,j'}$ liegt in Satz 5.9 begründet, welcher besagt dass sich die Werte von r und ξ_1 , sowie von ω und ξ_2/ξ_1 beliebig genau annähern.

q.e.d.

Lemma 5.16

Für jedes $p \in (0, 1]$ existiert ein $C_p < \infty$, sowie eine Folge $(\epsilon_{J,p})$, mit $\epsilon_{J,p} \rightarrow 0$ für $J \rightarrow \infty$, sodass

$$\|M^\#\|_p^p < C_p, \quad \|M^\# - B_J\|_p^p \leq \epsilon_{J,p} \quad \text{und} \quad \|B_J\|_p^p < C_p + \epsilon_{J,p} \quad (5.22)$$

Beweis

Aus den Darstellungen der Elemente von $M^\#$ beziehungsweise $M^\# - B_J$ in (5.18) und (5.21) folgt, dass es für jedes $p \in (0, 1]$ ein $C_p < \infty$ gibt, sodass

$$\max_Q \sum_{Q'} |\langle \phi_Q, \phi_{Q'} \rangle|^p < C_p, \quad (5.23)$$

sowie eine Folge $(\epsilon_{J,p})$, mit $\epsilon_{J,p} \rightarrow 0$ für $J \rightarrow \infty$, sodass

$$\max_{Q'} \sum_Q |\langle \phi_Q, \phi_{Q'} - \psi_{Q'} \rangle|^p < \epsilon_{J,p} \quad (5.24)$$

und

$$\max_Q \sum_{Q'} |\langle \phi_Q, \phi_{Q'} - \psi_{Q'} \rangle|^p < \epsilon_{J,p}. \quad (5.25)$$

Da $M^\#$ außerdem hermitesch ist, folgen daraus die ersten beiden Aussagen.

Die Beschränktheit der p -Quasinorm von B_J folgt aus der p -Dreiecksungleichung, die für diese Normen gilt (vgl. (1.25)) und den Abschätzungen, die wir eben bewiesen haben. Es gilt

$$\|B_J\|_p^p \leq \|B_J - M^\#\|_p^p + \|M^\#\|_p^p \leq C_p + \epsilon_{J,p}.$$

q.e.d.

Satz 5.17

Es gibt ein $J_0 \in \mathbb{N}$, sodass der Matrixoperator B_J^\dagger gegeben durch

$$B_J^\dagger = B_J^H \sum_{m \geq 0} (M^\# - B_J B_J^H)^m,$$

für alle $J > J_0$ wohldefiniert ist. Dieser erfüllt dann $\|B_J^\dagger\|_p < \infty$ und für $\alpha \in R(M^\#)$ gilt

$$B_J B_J^\dagger \alpha = \alpha,$$

Schließlich gilt

$$\|M^\# - B_J^\dagger\|_p \rightarrow 0 \quad \text{für } J \rightarrow \infty.$$

Beweis

Da $M^\#$ eine Projektion ist (vgl. (5.16) und Definition 1.45), wirkt $M^\#$ auf $R(M^\#)$ wie die Identische Abbildung und daher muss der Operator B_J^\dagger folgende Bedingung erfüllen,

$$B_J B_J^\dagger \alpha = M^\# \alpha \quad \text{für } \alpha \in R(M^\#).$$

Wir werden iterativ einen Operator B_J^\dagger finden, der diese Bedingung erfüllt und dann zeigen, dass dieser von der behaupteten Form ist. Dazu setzen wir $\delta^{(0)} = \alpha$ und dann rekursiv

$$A^{(m+1)} = B_J^H \delta^{(m)}, \quad \delta^{(m+1)} = \delta^{(m)} - B_J A^{(m+1)}. \quad (5.26)$$

Für $m = 0$ ist $\delta^{(m)} \in R(M^\#)$ und unter Verwendung von (5.17) ist

$$M^\# \delta^{(m+1)} = M^\# (Id - B_J B_J^H) \delta^{(m)} = (Id - B_J B_J^H) M^\# \delta^{(m)} = \delta^{(m+1)},$$

wodurch bewiesen ist, dass alle $\delta^{(m)}$ in $R(M^\#)$ liegen.

Die Abschätzungen in (5.22) besagen, dass es zu jedem $p \in (0, 1]$ ein J_0 gibt, sodass $\|M^\#\|_p^p \|M^\# - B_J\|_p^p < 1/4$ für alle $J > J_0$. Außerdem gilt für $\|M^\#\| \geq 1$ (vgl. Satz 1.45) und damit zeigen wir in Lemma 5.18, dass diese Iteration konvergiert.

q.e.d.

Lemma 5.18

Sei $0 < p \leq 1$ beliebig aber fix und sei $M^\#$ eine Projektion, $\delta^{(0)} \in R(M^\#)$, sowie B_J ein Matrixoperator, sodass

$$\|M^\#\|_p \|B_J - M^\#\|_p < \left(\frac{1}{4}\right)^{1/p} \quad \text{und} \quad \|M^\#\| \geq 1. \quad (5.27)$$

Dann gilt für das Iterationsschema in (5.26)

$$\|\delta^{(m)}\|_2 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^m \|\delta^{(0)}\|_2$$

und daher sind die beiden Reihen $\sum_{m \geq 0} \delta^{(m)}$ und $\sum_{m \geq 1} A^{(m)}$ absolut konvergent.

Beweis

Da, wie wir oben gesehen haben, alle $\delta^{(m)}$ in $R(M^\#)$ liegen, ist

$$\delta^{(m+1)} = (Id - B_J B_J^H) \delta^{(m)} = (M^\# - B_J B_J^H) \delta^{(m)}.$$

Schreiben wir kurz $\Delta = B_J - M^\#$, so gilt

$$M^\# - B_J B_J^H = (M^\#)^2 - (M^\# + \Delta)(M^\# + \Delta)^H = -(M^\# \Delta^H + \Delta (M^\#)^H + \Delta \Delta^H).$$

Wegen den beiden Voraussetzung in (5.27), ist insbesondere $\|\Delta\|_p = \|B_J - M^\#\|_p < \left(\frac{1}{4}\right)^{1/p}$ und in Summe gilt

$$\begin{aligned} \|M^\# - B_J B_J^H\|_p^p &= \|\Delta (M^\#)^H + M^\# \Delta^H + \Delta \Delta^H\|_p^p \\ &\leq 2 \|M^\#\|_p^p \|\Delta\|_p^p + \|\Delta\|_p^{2p} \\ &\leq 1/2 + 1/16 < 3/4 \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir (in der Notation aus Abschnitt 1.7)

$$\begin{aligned} \|\delta^{(m+1)}\|_2 &\leq \|M^\# - B_J B_J^H\|_{(2)} \|\delta^{(m)}\|_2 \\ &\leq \|M^\# - B_J B_J^H\|_p \|\delta^{(m)}\|_2 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{1/p} \|\delta^{(m)}\|_2 \leq \frac{3}{4} \|\delta^{(m)}\|_2. \end{aligned}$$

Aufgrund dieses geometrischen Abfalls und der Beschränktheit $\|B_J^H\|_{(2)} \leq \|B_J\|_p < \infty$ (vgl. (5.22)) können wir schließen, dass auch die Reihe zur Folge $(A^{(m)})_m = (B_J^H \delta^{(m-1)})_m$ absolut konvergiert.

q.e.d.

Fortsetzung des Beweises von Satz 5.17

Da die Konvergenz des Verfahrens nun erwiesen ist, können wir definieren: $B_J^\dagger \alpha = \sum_{m \geq 1} A^{(m)}$. Um nachzuweisen, dass es sich dabei tatsächlich um eine Lösung unseres Problems handelt, erinnern wir daran, dass aus obiger Iterationsvorschrift $B_J A^{(m)} = \delta^{(m-1)} - \delta^{(m)}$ folgt und daher ist

$$B_J B_J^\dagger \alpha = B_J \sum_{m \geq 1} A^{(m)} = \sum_{m \geq 1} \delta^{(m-1)} - \delta^{(m)} = \sum_{m \geq 0} \delta^{(m)} - \sum_{m \geq 1} \delta^{(m)} = \delta^{(0)} = \alpha.$$

Andererseits gilt

$$\delta^{(m)} = (M^\# - B_J B_J^H) \delta^{(m-1)} = \dots = (M^\# - B_J B_J^H)^m \delta^{(0)} = (M^\# - B_J B_J^H)^m \alpha,$$

weswegen

$$B_J^\dagger \alpha = \sum_{m \geq 1} A^{(m)} = \sum_{m \geq 1} B_J^H \delta^{(m-1)} = B_J^H \sum_{m \geq 0} (M^\# - B_J B_J^H)^m \alpha.$$

Wir können daher die Matrix B_J^\dagger , welche der Anwendung dieses Iterationsverfahrens entspricht, als

$$B_J^\dagger = B_J^H \sum_{m \geq 0} (M^\# - B_J B_J^H)^m$$

identifizieren und es gilt unter Verwendung von (1.25) und (1.26)

$$\begin{aligned} \|B_J^\dagger\|_p^p &\leq \|B_J^H\|_p^p \sum_{m \geq 0} \|(M^\# - B_J B_J^H)^m\|_p^p \\ &\leq \|B_J\|_p^p \sum_{m \geq 0} \left(\frac{3}{4}\right)^m \leq 4 \|B_J\|_p^p < \infty, \end{aligned}$$

Als Operatoren auf $R(M^\#)$ betrachtet, sind $M^\#$ und $B_J B_J^\dagger$ ident, somit gilt

$$\|M^\# - B_J^\dagger\|_p^p = \|B_J B_J^\dagger - B_J^\dagger\|_p^p \leq \|B_J - M^\#\|_p^p + \|B_J^\dagger\|_p^p \rightarrow 0,$$

da $\|B_J^\dagger\|_p^p < \infty$ und $\|B_J - M^\#\|_p^p \rightarrow 0$, wie wir in Lemma 5.16 gezeigt haben.

q.e.d.

Unser abschließendes Resultat besagt, dass jedes der beiden Systeme genau dann eine dünnbesetzte Koeffizientenfolge liefert, wenn dies auch das Andere tut.

Satz 5.19

Für hinreichend großes J ist Φ_J ein Frame. Außerdem gehen die Frame Bounds gegen 1 mit $J \rightarrow \infty$.

Sei f eine L^2 Funktion und sei $\alpha(f)$ die vom Curvelet Frame Φ erzeugte Koeffizientenfolge, sowie $\alpha^J(f)$ die vom zusammengesetzten System Φ_J erzeugte Koeffizientenfolge. Dann

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \sup_{f \neq 0} \frac{\|\alpha(f) - \alpha^J(f)\|_2}{\|f\|_2} = 0$$

Dual dazu, sei α ein Koeffizientenvektor und seien $f(\alpha)$ bzw. $f^J(\alpha)$ die Synthesen von α unter Verwendung von Φ bzw. Φ_J , dann

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \sup_{\alpha \neq 0} \frac{\|f(\alpha) - f^J(\alpha)\|_2}{\|\alpha\|_2} = 0$$

Beweis

Die Cross-Frame Matrix B_J verbindet Koeffizienten α im Φ Frame mit Koeffizienten α^J im System Φ_J . Angenommen wir hätten eine Koeffizientenfolge α_J , die, wenn wir sie auf Φ_J anwenden, f ergibt, also $f = \Phi_J(\alpha^J) = \sum_Q \alpha_Q^J \psi_Q$. Daraus möchten wir nun eine neue Koeffizientenfolge α berechnen, die dieselbe Funktion bezüglich des Φ -Frames beschreibt: $f = \Phi(\alpha) = \sum_Q \alpha_Q \phi_Q$. Da Φ ein tight Frame ist, erfüllt dies genau die Folge $\alpha = (\alpha_Q)_Q$ mit $\alpha_Q = \langle f, \phi_Q \rangle$ und es gilt

$$\alpha_Q = \langle f, \phi_Q \rangle = \left\langle \sum_{Q'} \alpha_{Q'}^J \psi_{Q'}, \phi_Q \right\rangle = \sum_{Q'} \langle \psi_{Q'}, \phi_Q \rangle \alpha_{Q'}^J = (B_J \alpha^J)_Q.$$

Also ist $\alpha = B_J \alpha^J$ und wir erhalten unter Verwendung von Satz 5.8

$$\|f\|_2^2 = \|\alpha\|_2^2 = \|B_J \alpha^J\|_2^2 \leq \|B_J\|_{(2)}^2 \|\alpha^J\|_2^2.$$

Daher ist $\|B_J\|_{(2)}^{-2}$ die untere Frame Bound für Φ_J .

Um die andere Schranke der Frame Bedingung zu erhalten, verwenden wir den Matrixoperator B_J^\dagger aus Satz 5.17, der es uns ermöglicht aus einer Koeffizientenfolge α im Φ Frame, eine Folge $\alpha^J = B_J^\dagger \alpha$ zu berechnen, die im Φ_J Frame die selbe Funktion erzeugt. In der Tat sind wir nur an Elementen $\alpha \in R(M^\#)$ interessiert, da für jedes f die Koeffizientenfolge $\alpha = (\alpha_Q)_Q = (\langle f, \phi_Q \rangle)_Q$ in $R(M^\#)$ liegt:

$$(M^\# \alpha)_Q = \sum_{Q'} \langle \phi_{Q'}, \phi_Q \rangle \langle f, \phi_{Q'} \rangle = \left\langle \sum_{Q'} \langle f, \phi_{Q'} \rangle \phi_{Q'}, \phi_Q \right\rangle = \langle f, \phi_Q \rangle = \alpha_Q.$$

Ein Element im Φ_J Frame, das f darstellen soll, muss – wie wir eben gesehen haben – die Bedingung $\alpha = B_J \alpha^J$ erfüllen. Dies ist für die Wahl $\alpha^J = B_J^\dagger \alpha$ sicher der Fall, da

$$B_J B_J^\dagger \alpha = \alpha.$$

Weiters gilt

$$\|\alpha^J\|_2^2 = \|B_J^\dagger \alpha\|_2^2 \leq \|B_J^\dagger\|_{(2)}^2 \|\alpha\|_2^2 = \|B_J\|_{(2)}^2 \|f\|_2^2$$

und wir erhalten $\|B_J^\dagger\|_{(2)}^2$ als obere Frame Bound.

Zusammenfassend haben wir gezeigt, dass Φ_J ein Frame ist und

$$\|B_J\|_{(2)}^{-2} \|f\|_2^2 \leq \sum_Q |\langle f, \psi_Q \rangle|^2 \leq \|B_J^\dagger\|_{(2)}^2 \|f\|_2^2.$$

Nach Satz 5.16 bzw. Satz 5.17 gilt

$$\|M^\# - B_J\|_p \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad \|M^\# - B_J^\dagger\|_p \rightarrow 0 \quad \text{für } J \rightarrow \infty$$

und daraus folgt, dass $\|B_J\|_{(2)} \rightarrow \|M^\#\|_2 = 1$ und die entsprechende Aussage für $\|B_J^\dagger\|_{(2)}$. Somit gehen die Frame Bounds gegen 1.

Die erste Aussage bezüglich der Übereinstimmung der Frames, ist eine Konsequenz aus der eben erwähnten Konvergenzaussage der Differenz $M^\# - B_J^\dagger$. Es gilt

$$\|\alpha(f) - \alpha^J(f)\|_2 = \|M^\#\alpha(f) - B_J^\dagger\alpha(f)\|_2 \leq \|M^\# - B_J^\dagger\|_{(2)} \|\alpha(f)\|_2.$$

und somit ist

$$\frac{\|\alpha(f) - \alpha^J(f)\|_2}{\|f\|_2} \leq \frac{\|M^\# - B_J^\dagger\|_{(2)} \|\alpha(f)\|_2}{\|f\|_2} = \|M^\# - B_J^\dagger\|_{(2)} \rightarrow 0.$$

In der zweiten Aussage gilt

$$\begin{aligned} \|f(\alpha) - f_J(\alpha)\|_2 &= \left\| \sum_Q \alpha_Q (\phi_Q - \psi_Q) \right\|_2 \\ &\leq \sum_Q |\alpha_Q| \|\phi_Q - \psi_Q\|_2 \leq \|\alpha\|_2 \sum_Q \|\phi_Q - \psi_Q\|_2 \end{aligned}$$

und daher ist

$$\frac{\|f(\alpha) - f_J(\alpha)\|_2}{\|\alpha\|_2} \leq \sum_Q \|\phi_Q - \psi_Q\|_2 \rightarrow 0 \quad \text{für } J \rightarrow \infty,$$

wobei die Konvergenz gegen 0 gewährleistet ist, da in der Summe nur die Terme mit $j > J$ ungleich Null sind und auf feinen Levels, die Curvelets mit den entsprechenden Wavelets sehr genau übereinstimmen (vgl. Satz 5.9).

q.e.d.

Korollar 5.20

Sei f eine Funktion mit dünnbesetzter Curvelet Transformation, also $\|\alpha(f)\|_p < \infty$, $\forall 0 < p \leq 1$ (siehe Kapitel 1.8). Dann hat f auch eine dünnbesetzte Φ_J Frame Transformation $\|\alpha^J(f)\|_p < \infty$ - und vice versa. Mit Konstanten, die nur von p abhängen, gilt

$$\|\alpha(f)\|_p \asymp \|\alpha^J(f)\|_p.$$

Bemerkung

Da diese Analogie zwischen dem Curvelet Frame und dem zusammengesetzten Frame nun etabliert ist, können wir bereits vorhandene Resultate für das echt parabolisch skalierte Waveletframe aus früheren Werken für die hier behandelte Curvelet Transformation übernehmen. So hat etwa Hart Smith in [S] für die echt parabolisch skalierten Wavelets gezeigt, dass sie eine dünnbesetzte Repräsentation von Fourier Integral Operatoren liefern und für die CCT lassen sich parallele Schlüsse ziehen (vgl. [CanDo2]).

Literaturverzeichnis

- [BFG] Beals, Michael and Fefferman, Charles and Grossman, Robert (1983) **Strictly Pseudoconvex Domains in \mathbb{C}^n**
- [CanDe] Candès, Emmanuel J. and Demanet, Laurent (2004) **The Curvelet Representation of Wave Propagators is Optimally Sparse**
- [CanDo1] Candès, Emmanuel J. and Donoho, David L. (2003) **Continuous Curvelet Transform: I. Resolution of the Wave Front Set**
- [CanDo2] Candès, Emmanuel J. and Donoho, David L. (2003) **Continuous Curvelet Transform: II. Discretization and Frames**
- [Ev] Evans, Lawrence C. (1998) **Partial Differential Equations**
- [Hörm1] Hörmander, Lars (1970) **Fourier Integral Operators I.** *Acta Mathematica* 127, S.79-183
- [Hörm2] Hörmander, Lars (1971) **Fourier Integral Operators II** *Acta Mathematica* 128, S.183-269
- [Hörm3] Hörmander, Lars (1983) **The Analysis of Linear Partial Differential Operators I**
- [L] Luenberger, David G. (1969) **Optimization by Vector Space Methods**
- [S] Smith, Hart F. (1998) **A Hardy space for Fourier integral operators.** *J. Geom. Anal.* 8, no. 4, S. 629-653
- [StRaym] Saint Raymond, Xavier (1991) **Elementary Introduction to the Theory of Pseudodifferential Operators**
- [Str] Strichartz, Robert (1994) **A Guide to Distribution Theory and Fourier Transform**
- [Wo] Wong, M. W. (1991) **An Introduction to Pseudo-Differential Operators**