Jordan-Hölder Faktoren der symmetrischen Algebra der Standarddarstellung der GL_n in positiver Charakteristik

Bachelor-Arbeit

vorgelegt am 7. August 2013

Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg
Fakultät für Mathematik und Informatik

Name:	Charlotte Ure
Matrikelnummer:	2861359
Betreuer	Prof. Gebhard Böckle

Zusammenfassung

Die Darstellungstheorie ist ein wichtiges Gebiet der Algebra mit Anwendungen in vielen Bereichen der Mathematik. Nach William Fulton und Joe Harris ist Darstellungstheorie als das Studium der möglichen Operationen einer gegebenen Gruppe auf Vektorräumen definiert (Fulton u. Harris, 1991, Vorwort). Aufbauend auf einem Seminar zum Thema *Affine Algebraische Gruppen* im Wintersemester 2012/2013 bei Prof. Gebhard Böckle, habe ich mich mit der Darstellungstheorie von affinen lineare Gruppen, insbesondere von GL_n und SL_n in positiver Charakterisitik beschäftigt. Ein Standardwerk dieser Theorie ist das Buch *Representations of Algebraic Groups* von Jens Carsten Jantzen. Dieses diente als Hauptquelle der vorliegenden Bachelorarbeit.

Diese Arbeit gliedert sich in zwei große Teile. Im ersten Teil beschäftigt sie sich mit der Bestimmung aller irreduziblen Darstellungen von SL_2 und GL_2 in positiver Charakteristik. Diese können durch den Tensorproduktsatz von Steinberg mit Hilfe von Tensorprodukten und Frobenius-Twistungen aus den symmetrischen Algebren vom Grad r und der äußeren Tensoralgebra vom Grad zwei konstruiert werden.
Im zweiten Teil werden die Jordan-Hölder Faktoren der symmetrischen Tensoralgebra vom Grad r über GL_2 und danach über GL_n berechnet. Diese lassen sich mit Hilfe von Höchstgewichten eindeutig charakterisieren. Zur Berechnung der Faktoren in unterschiedlicher Charakteristik habe ich das Programm *Sage* genutzt.

Abstract

According to William Fulton and Joe Harris, representation theory is the study of the ways in which a given group may act on vector spaces (Fulton u. Harris, 1991, Preface). Based on the seminar *Affine Algebraic Groups* in the winter term 2012/2013 by Prof. Gebhard Böckle, I dealt with the representation theory of affine linear groups, especially of GL_n and SL_n in positive characterisitic. The book *Representations of Algebraic Groups* by Jens Carsten Jantzen was the key source for this bachelor thesis.

This thesis is divided in two parts. The first one is concerned with the computation of all irreducible representations of SL_2 and GL_2 in positive characterisitic. With Steinberg's tensor product theorem they can be described as tensor products and Frobenius twists of the symmetric tensor algebra of degree r and the exterior tensor algebra of degree two.
The second part treats of the Jordan-Hölder factors of the symmetric tensor algebra of degree r over GL_2 and GL_n. For the computation of these factors I used the software *Sage*.

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen **1**

1.1 Grundlegende Definitionen . . . 1

1.1.1 Die symmetrische und die äußere Algebra . . . 3

1.2 Die Lie-Gruppe . . . 3

1.3 Gewichte, Wurzeln und die Weyl-Gruppe . . . 4

1.4 Einfache Moduln . . . 6

1.5 Dominante Gewichte und Höchstgewichte . . . 7

1.6 Getwistete Darstellungen und der Frobenius-Twist . . . 8

1.7 Steinbergs Tensorproduktsatz . . . 9

1.8 Veränderungen der Gewichte . . . 10

1.9 Der Binomialkoeffizient und der Multinomialkoeffizient modulo p . . . 11

2 Der Fall $SL_2(\mathbb{F}_q(T))$ **13**

2.1 Wurzelsystem . . . 13

2.2 Berechnung der dominanten Gewichte . . . 14

2.3 Zerlegung der irreduziblen Darstellungen . . . 15

2.4 Bestimmung von $L(r,0)$ für $0 \leq r < p$ . . . 15

3 Der Fall $GL_2(\mathbb{F}_q(T))$ **19**

3.1 Berechnung der dominanten Gewichte . . . 19

3.2 Zerlegung der irreduziblen Darstellungen . . . 20

3.3 Bestimmung von $L(a_2, a_2)$ . . . 21

3.4 Fazit . . . 21

4 Berechnung der Jordan-Hölder-Faktoren von $sym^r(V)$ für GL_2 **23**

4.1 Der Satz von Jordan-Hölder . . . 23

4.2 Einbettung von $L(r,0)$ in $sym^r(V)$ . . . 25

4.3 Eine Zerlegungsreihe von $sym^r(V)$ . . . 26

4.4 Beispiele . . . 26

4.4.1 p=3, r=4 . . . 26

4.4.2 p=3, r=5 . . . 27

4.4.3 p=2, r=4 . . . 27

4.5 Ergebnisse . . . 28

4.6 Ein Prüflemma . . . 29

5 Berechnung der Jordan-Hölder-Faktoren von $sym^r(V)$ für GL_n **31**
5.1 Wurzelsystem 31
5.2 Berechnung der dominanten Gewichte 31
5.3 Zerlegung der irreduziblen Darstellungen 31
5.4 Gewichte von $sym^r(V)$ 32
5.5 Bestimmung einiger irreduzibler Bausteine 32
5.6 Ergebnisse 35
5.6.1 n=3 35
5.6.2 n=4 36

6 Fazit **37**

7 Anhang **I**
7.1 Algorithmus für GL_2 I
7.2 Algorithmus für GL_n III

Literaturverzeichnis **VII**

Danksagung **IX**

Erklärung **XI**

1 Grundlagen

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit wichtigen Definition zum Verständnis der weiteren Arbeit. Zunächst werden die generelle, sowie die spezielle lineare Gruppe eingeführt. Um alle irreduziblen Darstellungen einer Gruppe zu bestimmen, ist eine Beschreibung durch Höchstgewichtsmoduln hilfreich. So korrespondiert jede irreduzible Darstellung zu einem einfachen Modul und jeder einfache Modul ist isomorph zu einem Höchstgewichtmodul $L(\lambda)$ zu einem dominanten Gewicht λ.
Danach wird die Zerlegung dieser Höchstgewichtmoduln behandelt. Diese können mit Hilfe von Steinberg's Tensorproduktsatz durch Frobenius-Twistungen und Tensorprodukte von einfachen Moduln mit 'kleinem' Höchstgewicht $\lambda \in X_1(T)$ beschrieben werden.
Die Definitionen sind, soweit nicht anders gekennzeichnet, aus Jantzen (2003) und Springer (1998) übernommen.
Sei k im gesamten Kapitel ein Körper mit Charakteristik p.

1.1 Grundlegende Definitionen

Definition 1.1. Sei M ein endlich dimensionaler Vektorraum über k.

- $GL(M)$ ist der Funktor von der Kategorie der k-Algebren in die Kategorie der Gruppen, definiert durch $GL(M)(A) := \left(\mathrm{End}_A(M \otimes A)\right)^\times$.
  $GL(M)$ heißt die generelle lineare Gruppe zu M.
- $GL_n := GL(k^n)$.
- $\mathbb{G}_m := GL_1$ heißt die multiplikative Gruppe von G.
- Die Determinante definiert einen Homomorphismus von k-Gruppen $GL(M) \to \mathbb{G}_m$. Der Kern dieser Abbildung heißt spezielle lineare Gruppe und wird mit $SL(M)$ bezeichnet.
- $SL_n := SL(k^n)$

Definition 1.2.

- Eine algebraische Gruppe ist eine algebraische Varietät G, die auch eine Gruppe ist, sodass die Strukturabbildungen

$$\begin{aligned} \mathrm{mult} &: G \times G \to G : (x, y) \mapsto xy \\ \mathrm{inv} &: G \to G : x \mapsto x^{-1} \end{aligned}$$

  Morphismen von Varietäten sind.
- Ist die zugrundeliegende Varietät affin, so heißt G lineare algebraische Gruppe.

Definition 1.3. Siehe auch (Waterhouse, 1979, Kapitel 1.4). Sei A eine k-Algebra mit k-Algebren-Abbildungen

$\Delta : A \to A \otimes A$ (Comultiplikation)

$\epsilon : A \to k$ (Coeinheit)

$S : A \to A$ (Coinverse)

sodass die folgenden Diagramme kommutieren

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A & A \otimes A \arrow[l, "id \otimes \Delta"'] & k \otimes A & A \otimes A \arrow[l, "\epsilon \otimes id"'] & A \arrow[l, "S \otimes id"'] & A \otimes A \\
A \otimes A \arrow[u, "\Delta \otimes id"] & A \arrow[l, "\Delta"] \arrow[u, "\Delta"] & A \arrow[u, "\sim"] \arrow[r, equal] & A \arrow[u, "\Delta"] & k \arrow[u, hook] & A \arrow[l, "\epsilon"] \arrow[u, "\Delta"]
\end{tikzcd}$$

Ein solches A heißt Hopf-Algebra.

Theorem 1.4. *Algebraische Gruppen über k korrespondieren zu Hopf-Algebren über k.*

Beweis. Siehe (Waterhouse, 1979, Kapitel 1.4).

Beispiel 1.5. Die Funktoren GL_n und SL_n sind dargestellt durch lineare algebraische Gruppen über k.
GL_n wird dargestellt durch die Hopf-Algebra $A = k\left[X_{1,1}, \dots, X_{n,n}, det^{-1}\right]$. Die Comultiplikation ist hierbei gegeben durch $\Delta(X_{i,j}) = \sum X_{i,k} \otimes X_{k,j}$.

Definition 1.6. Sei G eine lineare, algebraische Gruppe.

- $X(G) := \mathrm{Mor}(G, \mathbb{G}_m)$ heißt Charaktergruppe zu G. $\chi \in X(G)$ heißt Charakter.
- G heißt diagonalisierbar $:\Leftrightarrow G$ ist isomorph zu einer abgeschlossenen Untergruppe von $\mathbb{D}_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$, die Gruppe der Diagonalmatrizen der Größe n.
- G heißt Torus $:\Leftrightarrow G$ ist isomorph zu einem $\mathbb{D}_n$.
- Eine Untergruppe $T \subset G$ heißt maximaler Torus $:\Leftrightarrow \forall T'$ Torus in G gilt: $T \subset T' \Rightarrow T = T'$.

Beispiel 1.7. Die Untergruppen $\mathbb{D}_n \subset GL_n$ und $\left(\mathbb{D}_n \cap SL_n\right) \subset SL_n$ sind maximale Tori.

Definition 1.8. Sei G eine lineare, algebraische Gruppe. Eine Borel-Untergruppe von G ist eine abgeschlossene, zusammenhängende, auflösbare Untergruppe, welche maximal mit diesen Eigenschaften ist.

Beispiel 1.9. Sei $G = GL_n$ und $\mathbb{T}_n$ die Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen. Dann ist $\mathbb{T}_n$ eine Borel-Untergruppe von G.
Außerdem ist $\mathbb{T}_n \cap SL_n$ eine Borel-Untergruppe von SL_n.

Definition 1.10. Sei G eine lineare algebraische Gruppe und V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über k. Eine (rationale) Darstellung von G in V ist ein Homomorphismus von algebraischen Gruppen $r : G \to GL(V)$.

1.1.1 Die symmetrische und die äußere Algebra

Für die folgenden Definitionen siehe auch (Hartshorne, 1977, Exercise 5.16).

Sei V ein Vektorraum über einem Körper k. Definiere das r-fache Tensorprodukt und die Tensoralgebra von V als

$$T^r(V) := V \otimes \cdots \otimes V$$
$$T(V) := \bigoplus_{r=0}^{\infty} T^r(V)$$

$T(V)$ ist ein (nichtkommutativer) Ring mit k-Produkt.
Weiterhin sei

$$I(V) := (v \otimes w - w \otimes v | v, w \in V) \subset T(V)$$

Die symmetrische Algebra ist dann definiert als

$$sym(V) := T(V)/I(V)$$
$$sym^r(V) := im(T^r(V)) \subset sym(V)$$
$$sym(V) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} sym^r(V)$$

Die äußere Algebra wird über das Ideal J defniert

$$J^r(V) := \left\langle v_1 \otimes \cdots \otimes v_k | \exists i, j \in \{1, \ldots, k\}; i \neq j : v_i = v_j \right\rangle_{k-Spann}$$
$$J(V) := \bigoplus_{r=0}^{\infty} J^r(V)$$
$$\Lambda^r(V) := T^r(V)/J^r(V)$$
$$\Lambda(V) := T(V)/J(V)$$
$$\Lambda(V) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} \Lambda^r(V)$$

1.2 Die Lie-Gruppe

Siehe für diesen Abschnitt auch (Humphrey, 1975, Kapitel 3) und (Fulton u. Harris, 1991, Kapitel 8.1).
Sei G eine lineare algebraische Gruppe über k, $A = k[G]$ die darstellende Hopf-Algebra.

Definition 1.11. Eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist ein Vektorraum zusammen mit einer bilinearen Abbildung

$$[\,,\,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

sodass die Abbildung schiefsymmetrisch ist und die Jacobi-Identität erfüllt, das heißt

$$[X, Y] = -[Y, X]$$

und

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

Definition 1.12. Die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ der Gruppe G dargestellt duch A ist der k-Vektorraum von allen linksinvarianten Derivationen $D : A \to A$. Die Lie-Klammer wird definiert durch $\left[D_1, D_2\right] = D_1 D_2 - D_2 D_1$ für $D_1, D_2 \in Lie(G)$.

Beispiel 1.13. Die generelle lineare Algebra $\mathfrak{gl}_\mathfrak{n}$ ist die assoziative Algebra M_n von Matrizen der Größe n betrachtet als Lie-Algebra. Dies ist die Lie-Algebra von GL_n.

Definition 1.14. Betrachte den inneren Automorphismus

$$Int_x : G \to G : y \mapsto xyx^{-1}$$

Definiere die adjungierte Darstellung von G als den Homomorphismus

$$Ad : G \to Aut\mathfrak{g} : x \mapsto Ad_x := d(Int_x)$$

Bemerkung 1.15. G operiert auf $\mathfrak{g}$ via der adjungierten Darstellung.

Beispiel 1.16. Sei $G = GL_n$. Die zugehörige Lie-Algebra ist $\mathfrak{gl}_\mathfrak{n} = k[X_{1,1}, \dots, X_{n,n}]$. Dann ist die Adjungierte Abbildung

$$Ad_g(X) = gXg^{-1}$$

für $g \in GL_n$, $X \in \mathfrak{gl}_\mathfrak{n}$. Vergleiche hierzu (Kirillov, 2008, Abschnitt 2.6).

Definition 1.17. Eine Darstellung einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ auf einem Vektorraum V ist eine Abbildung von Lie-Algebren

$$\varrho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V) = End(V)$$

das heißt eine Operation von $\mathfrak{g}$ auf V mit

$$[X, Y](v) = X(Y(v)) - Y(X(v))$$

Theorem 1.18. *Sei G eine zusammenhängende und einfach zusammenhängende Lie-Gruppe mit neutralem Element e, $\mathfrak{g}$ die zugehörige Lie-Algebra, V ein Vektorraum. Dann korrespondieren Darstellung von G auf V zu Darstellungen von $\mathfrak{g}$ auf V.*
Bei dieser Bijektion wird jeder Darstellung $r : G \to GL(V)$ ihr Differential $(dr)_e : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ zugeordnet.

Beweis. Siehe (Fulton u. Harris, 1991, 8.10 und 8.11).

1.3 Gewichte, Wurzeln und die Weyl-Gruppe

Sei G einealgebraische Gruppe, T ein maximaler Torus in G, V ein endlich dimensionaler k-Vektorraum und $r : T \to GL(V)$ eine Darstellung von T.

Definition 1.19. Sei $\chi \in X(T)$. Dann operiert ein $t \in T$ auf V durch Multiplikation via $\chi(t) \in \mathbb{G}_m$. Definiere

$$V_\chi := \{v \in V | r(t)v = \chi(t)v \ \forall t \in T\}$$

Gilt $V_\chi \neq 0$, so heißt χ Gewicht von T in V und V_χ Gewichtsraum. Sei P_V die Menge der Gewichte von T auf V.
Die Dimension von V_χ als k-Vektorraum heißt Vielfachheit von χ.

Bemerkung 1.20.

$$V = \bigoplus_{\chi \in P_V} V_\chi$$

Sei ab hier G eine zusammenhängende lineare algebraische Gruppe.

Definition 1.21. Sei $W := W(G,T) = N_G(T)/Z_G(T)$ mit $N_G(T)$ dem Normalisator von T in G und $Z_G(T)$ dem Zentralisator von G in T. Dies ist die Weyl-Gruppe von (G,T). Notiere die Operation von $w \in W$ auf $x \in X(T)$ mit $w.x$.

Beispiel 1.22. Sei $G = GL_n$, $T = \mathbb{D}_n$. Dann ist der Normalisator $N_G(T)$ die Mege der Monomialmatrizen in GL_n, das heißt die Menge der Matrizen mit genau einem Nicht-Null-Eintrag in jeder Zeile und jeder Spalte. Der Zentralisator ist $Z_G(T) = T$.
Sei $E_{i,j}$ die Matrix mit Eintrag 1 an der Stelle (i,j) und sonst Null. Diese Matrizen bilden eine Basis von $M_n(k)$. Bezeichne $X_{i,j}$ die dazu duale Basis. Dann sind $\epsilon_i := X_{i,i}|_T$ eine Basis von $X(T)$.
Die Weyl-Gruppe permutiert die ϵ_i und ist vermöge der Abbildung, die jedes $w \in W$ auf die Permutation σ abbildet, die $w(\epsilon_i) = \epsilon_{\sigma(i)}$ erfüllt, isomorph zur symmetrischen Gruppe S_n.

Definition 1.23. Die Menge der Cocharaktere von T ist

$$Y(T) := \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, T)$$

$$T \cong (\mathbb{G}_m)^r \Rightarrow Y(T) \cong \mathbb{Z}^r$$

Notiere mit $<,>$ die Paarung zwischen $X(T)$ und $Y(T)$

$$<,>: X(T) \times Y(T) \to End(\mathbb{G}_m) \cong \mathbb{Z} : (\chi, \varphi) \mapsto \chi \circ \varphi$$

Identifiziere $X(T), Y(T)$ mit Untergruppen von $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} X(T)$ bzw. $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} Y(T)$. Die induzierte Paarung wird auch mit $<,>$ bezeichnet.

Wähle eine feste positiv definite, symmetrische Bilinearform $(,)$ auf $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} X(T)$, welche invariant ist unter der induzierten Operation von W.
Eine solche existiert, da für eine beliebige positiv definite symmetrische Bilinearform f auf $\mathbb{R} \otimes X(T)$ die Paarung $(,)$ definiert werden kann durch

$$(x,y) := \sum_{w \in W} f(w.x, w.y)$$

Sei für $\alpha \in X(T)$ das Cogewicht $\alpha^\vee$ eindeutig festgelegt durch die Gleichung

$$< x, \alpha^\vee >= 2\frac{(x,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} X(T)$$

Für die Existenz und die Eindeutigkeit des Cogewichtes siehe (Springer, 1998, Lemma 7.1.8).

Definition 1.24. Die Nicht-Null-Gewichte der adjungierten Darstellung von G auf der Lie-Gruppe $\mathfrak{g}$ heißen Wurzeln von G in Bezug auf T. Die Menge dieser Wurzeln wird mit R bezeichnet.
Die Menge R zusammen mit der Abbildung $\alpha \mapsto \alpha^\vee$ ist ein Wurzelsystem erzeugt durch R in $X(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.

Definition 1.25. Eine Teilmenge $R^+ \subset R$ heißt positives Wurzelsystem $:\Leftrightarrow \exists x \in V$ mit $(\alpha, x) \neq 0 \forall\, \alpha \in R$, sodass

$$R^+ = \{\alpha \in R | (\alpha, x) > 0\}$$

Theorem 1.26. *Sei G eine zusammenhängende, lineare algebraische Gruppe, T ein maximaler Torus in G und R die Wurzeln von G in Bezug auf T. Dann gibt es eine Bijektion zwischen Borel-untergruppen B von G, die T enthalten und positiven Wurzelsystemen R^+ in R.*

Beweis. Siehe (Springer, 1998, 7.4.5 und 7.4.6).

Definition 1.27. Die Wurzelbasis $S \subset R^+$ ist die linear unabhänige Teilmenge von R^+, sodass $R^+ \subset \sum_{\alpha \in S} \mathbb{N}\alpha$. Ihre Elemente werden als fundamentale Wurzeln bezeichnet.
Für die Existenz siehe (Springer, 1998, Lemma 8.2.6).

Definition 1.28. Definiere eine Ordnungsrelation auf $X(T)$ durch

$$\lambda \leq \mu \Leftrightarrow \mu - \lambda \in \sum_{\alpha \in S} \mathbb{N}\alpha = \sum_{\beta \in R^+} \mathbb{N}\beta$$

1.4 Einfache Moduln

Sei G eine lineare algebraische Gruppe über k dargestellt durch die Hopf-Algebra A.

Theorem 1.29. *Sei V ein k-Modul. Darstellungen von G auf V korrespondieren zu k-linearen Abbildungen $\rho : V \to V \otimes A$, sodass folgende Diagramme kommutieren.*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, equal] & V \otimes A \arrow[d, "id \otimes \epsilon"] \\ V \arrow[r, "\sim"] & V \otimes k \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & V \otimes A \arrow[d, "id \otimes \Delta"] \\ V \otimes A \arrow[r, "\rho \otimes id"'] & V \otimes A \otimes A \end{tikzcd}$$

Beweis. siehe (Waterhouse, 1979, S.22).

Definition 1.30. Nenne (V, ρ) aus 1.29 einen G-Modul oder Comodul.

Definition 1.31.
- Ein G-Modul M heißt einfach und die zugehörige Darstellung irreduzibel $:\Leftrightarrow M \neq 0$ und M hat keine nicht-trivialen G-Untermoduln.
- Sei M ein G-Modul. Der Sockel von M in G ist $soc_G\, M := soc\, M$, dieser bezeichnet die Summe aller einfachen G-Untermoduln von M.
- Ein G-Modul M heißt halbeinfach, falls er direkte Summe von einfachen G-Moduln ist.

Bemerkung 1.32.
- Ist M einfach, so gilt: $soc\, M = M$.
- $soc\, M$ ist der größte halbeinfache G-Untermodul von M.

1.5 Dominante Gewichte und Höchstgewichte

Sei G eine lineare algebraische Gruppe, T ein maximaler Torus von G, R ein Wurzelsystem, $R^+ \subset R$ ein positives Wurzelsystem und $T \subset B \subset G$ die Boreluntergruppe zu R^+ unter 1.26.

Definition 1.33. Die Menge der dominanten Gewichte sei

$$X(T)_+ := \{\lambda \in X(T) | \left\langle \lambda, \alpha^\vee \right\rangle \geq 0 \forall \alpha \in R^+\}$$

Definition 1.34. Sei $\lambda \in X(G)$. Schreibe k_λ für k als B-Modul via λ.

Definition 1.35. Sei $H \subset G$ eine Untergruppe und M ein H-Modul. Dann gibt es eine natürliche $G \times H$-Modulstruktur auf $M \otimes k[G]$ durch die triviale Operation von G auf M und die linksreguläre Darstellung auf $k[G]$. H operiere mit der gegebenen Operation auf M und via der rechtsregulären Darstellung auf $k[G]$. Benenne diesen G-Modul als induzierten Modul und schreibe $ind_H^G M$.

$$ind_H^G : \{H - \text{Moduln}\} \to \{G - \text{Moduln}\}$$

Definition 1.36. Sei $\lambda \in X(T)_+$. Setze

$$L(\lambda) = soc_G ind_B^G(k_\lambda)$$

Nenne diesen Modul Höchstgewichtmodul zum Gewicht λ.

Bemerkung 1.37. Das größte Gewicht von $L(\lambda)$ bezüglich $\leq$ ist λ.

Theorem 1.38. *Jeder einfache G-Modul ist isomorph zu genau einem $L(\lambda)$ mit $\lambda \in X(T)_+$.*

Beweis. Siehe (Jantzen, 2003, S.177 f.).

1.6 Getwistete Darstellungen und der Frobenius-Twist

Sei G eine algberaische Gruppe, T ein maximaler Torus von G, R ein Wurzelsystem mit Wurzelbasis S.

Definition 1.39. Sei $\alpha : G \to G'$ ein Homomorphismus von k-Gruppen. Definiere für einen G'-Modul M den G-Modul $\alpha^*(M) = M$ wie folgt:
Für jede k-Algebra A operiert $G(A)$ auf $M \otimes A$ via dem Homomorphismus $\alpha(A) : G(A) \to G'(A)$ und der Operation von $G'(A)$ auf M.
Dann ist α^* ein exakter Funktor mit

$$\alpha^* : \left\{G' - \text{Moduln}\right\} \to \{G - \text{Moduln}\}$$

Im Fall $G = G'$ bezeichnet man $\alpha^*(M)$ als Twistung von M mit α.
Gilt $\alpha \in Aut(G)$ schreibe ${}^{\alpha}M = \left(\alpha^{-1}\right)^* M$.

Definition 1.40.

- Sei A eine k-Algebra, $m \in \mathbb{Z}$. Definiere $A^{(m)}$ als diejenige k-Algebra, für die gilt
  - $A^{(m)} = A$ als Ring.
  - $b \in k$ operiert auf A durch $b^{p^{-m}}$.
- Sei X ein k-Funktor, $r \in \mathbb{N}$. Definiere den k-Funktor $X^{(r)}$ durch

  $$X^{(r)}(A) = X\left(A^{(-r)}\right) \ \forall\ k\text{-Algebren } A$$

  Definiere den r-ten Frobenius-Morphismus $F_X^r : X \to X^{(r)}$ durch

  $$F_X^r(A) = X^{(r)}(A)\ \forall\ k\text{-Algebren } A$$

Bemerkung 1.41. Ist in Definition 1.40 $X = Spec_k(R)$ affin für R eine k-Algebra, so gilt für $r \in \mathbb{N}$

$$\left(Spec_k R\right)^{(r)} \cong Spec_k\left(R^{(r)}\right)$$

Außerdem hat F_X^r den Comorphismus

$$R^{(r)} \to R : f \mapsto f^{p^r}$$

Vergleiche auch (Jantzen, 2003, 9.2).

Bemerkung 1.42. Ist $k = \mathbb{F}_p$ oder ist G über $\mathbb{F}_p$ definiert, so ist $G^{(r)} \cong G$ und F_G^r lässt sich als eine Abbildung $G \to G$ auffassen.
Siehe hierfür (Jantzen, 2003, 9.4).

Beispiel 1.43. Sei $G = GL_n$, $B = \left(b_{ij}\right) \in G$. Dann ist $F^r(B) = C$ mit $C = \left(c_{ij}\right) = \left(b_{ij}^{p^r}\right)$.

Definition 1.44. Sei M ein G-Modul. Definiere eine neue G-Modulstruktur auf M durch Verknüpfung der gegebenen Darstellung $G \to GL(M)$ mit $F^r : G \to G$. Bezeichne diesen neuen Modul als Frobenius-Twist von M und schreibe $M^{[r]}$.

Definition 1.45. Sei M ein k-Modul, $\phi : k \to k$ ein Ringhomomorphismus. Schreibe $M^{(\phi)}$ für den k-Modul M auf dem $a \in k$ als $\phi(a)$ operiert.

Beispiel 1.46. Sei $G = GL_n$, $T = \mathbb{D}_n$, M ein G-Modul.
$\alpha : k \to k : x \mapsto a \cdot x$ für ein $a \in k^\times$ ist ein Ringhomomorphismus. Seien P_M die Gewichte von M. Dann gilt für die Gewichte $P_{M^{(\alpha)}}$ von $M^{(\alpha)}$

$$P_{M^{(\alpha)}} = \left\{ \lambda \in X(T) \middle| a^{-1} \cdot \lambda \in P_M \right\}$$

Denn für $\lambda \in X(T)$ gilt

$$\begin{aligned} \left(M^{(\alpha)}\right)_\lambda &= \left\{ m \in M \middle| r_\alpha(t)m = \lambda t(m) \forall t \in T \right\} \\ &= \{ m \in M | r(t)am = \lambda t(m) \forall t \in T \} \\ &= \left\{ m \in M \middle| r(t)m = a^{-1} \lambda t(m) \forall t \in T \right\} \end{aligned}$$

1.7 Steinbergs Tensorproduktsatz

Sei G eine algebraische Gruppe, T ein maximaler Torus und S einfache Wurzeln von G.

Definition 1.47. Definiere für $r \in \mathbb{N}$

$$X_r(T) := \left\{ \lambda \in X(T) \middle| 0 \leq \left\langle \lambda, \alpha^\vee \right\rangle < p^r \ \forall \ \alpha \in S \right\}$$

Theorem 1.48. *Sei $\lambda \in X_r(T)$ und $\mu \in X(T)_+$. Dann gilt*

$$L(\lambda + p^r \mu) \cong L(\lambda) \otimes L(\mu)^{[r]}$$

Beweis. siehe (Jantzen, 2003, S.197 f.)

Theorem 1.49. *Sei $\lambda \in X(T)_+$, $\lambda = \sum_{i=0}^m p^i \lambda_i$ mit $\lambda_0, \dots, \lambda_m \in X_1(T)$. Dann gilt*

$$L(\lambda) \cong L(\lambda_0) \otimes L(\lambda_1)^{[1]} \otimes \cdots \otimes L(\lambda_m)^{[m]}$$

Beweis. siehe (Jantzen, 2003, S.198 f.).

1.8 Veränderungen der Gewichte

Sei G eine lineare algebraische Gruppe, T ein maximaler Torus von G.

Theorem 1.50. *Eine lineare algebraische Gruppe ist genau dann diagonisierbar, wenn jede ihrer rationalen Darstellungen direkte Summe von eindimensionalen Darstellungen ist.*

Beweis. Siehe (Springer, 1998, S.43).

Theorem 1.51. *Sei V ein endlich dimensionaler k-Vektorraum. Dann gilt für die Twistung $V^{[i]}$*

$$P_{V^{[i]}} = \left\{\chi \in X(T) \middle| \exists \mu \in P_V \text{ mit } p^i \mu = \chi\right\}$$

Beweis. Sei $\overline{k}$ der algebraische Abschluss vom Körper k, $\chi \in X(T) \subset X\left(T\left(\overline{k}\right)\right)$.

$$\begin{aligned}
V_\chi^{[i]} &= \left\{v \in V^{[i]} | r^{[i]}(t)v = \chi(t)v \forall t \in T\right\} \\
&= \left\{v \in V | r(F^i(t))(v) = \chi(t)v \forall t \in T\right\} \\
&= \left\{v \in V \middle| r(t^{p^i})(v) = \chi(t)v \forall t \in T\right\} \\
&= \left\{v \in V \middle| r\left(t^{p^i}\right)(v) = p^{-i}\chi\left(t^{p^i}\right)v \forall t \in T\right\} \\
&\overset{(*)}{=} V_{p^{-i}\mu}
\end{aligned}$$

(*) gilt, da T diagonalisierbar und somit das Theorem erfüllt ist.

Dann ist $V_\chi^{[i]} \neq 0 \Leftrightarrow \chi = p^i\mu$ für μ ein Gewicht von V und da $V_\chi^{[i]} = V_{p^{-i}\mu}$ ist auch $dim_k V_\chi^{[i]} = dim_k V_{p^{-i}\mu}$. Also bleiben die Vielfachheiten erhalten.

Theorem 1.52. *$V \otimes W$ hat genau die Gewichte $\nu = \mu + \lambda$ mit μ ein Gewicht von V und λ ein Gewicht von W. Die Vielfachheit des Gewichtes ist $m_\mu \cdot m_\lambda$ für m_μ, m_λ die Vielfachheiten von μ bzw. λ.*

Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned}
V \otimes W &= \left(\bigoplus_{\mu \in P_V} V_\mu\right) \otimes \left(\bigoplus_{\lambda \in P_W} W_\lambda\right) \\
&= \bigoplus_{\mu+\lambda \text{ mit } \mu \in P_V, \lambda \in P_W} \left(V_\mu \otimes W_\lambda\right)
\end{aligned}$$

und

$$\dim(V_\mu \otimes V_\lambda) = \dim(V_\mu) \cdot \dim(V_\lambda)$$

1.9 Der Binomialkoeffizient und der Multinomialkoeffizient modulo p

Definition 1.53. Seien $n, m \in \mathbb{N}$. Definiere den Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{m} := \begin{cases} 0 & m > n \\ \frac{n!}{m!(n-m)!} & sonst \end{cases}$$

Theorem 1.54. *Satz von Lucas (1872). Sei p eine Primzahl.*

- *Sei $m \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq m \leq p-1$. Dann ist $\binom{p}{m}$ durch p teilbar.*
- *Seien $m, n, q, r \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq q \leq p-1$ und $0 \leq r \leq p-1$. Dann gilt:*

$$\binom{pn+q}{pm+r} = \binom{n}{m}\binom{q}{r} \ mod\ p$$

- *Seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit p-adischen Entwicklungen $n = \sum_{i=0}^{r} n_i p^i$, $m = \sum_{i=0}^{r} m_i p^i$. Dann gilt:*

$$\binom{n}{m} = \binom{n_r}{m_r} \cdot \binom{n_{r-1}}{m_{r-1}} \cdots \binom{n_0}{m_0} \ mod\ p$$

Beweis. siehe Engelschön u. Fößl (2013).

Definition 1.55. Seien $n, m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$. Definiere den Multinomialkoeffizienten

$$\binom{n}{m_1, \ldots, m_k} := \begin{cases} 0 & \sum_{i=1}^{k} m_i \neq n \\ \frac{n!}{m_1! \cdots m_k!} & sonst \end{cases}$$

Korollar. Seien $n, m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ mit p-adischen Entwicklungen $n = \sum_{i=0}^{r} n_i p^i$, $m_j = \sum_{i=0}^{r} m_{j,i} p^i$. Dann gilt:

$$\binom{n}{m_1, \ldots, m_k} = \binom{n_r}{m_{1,r}, \ldots, m_{k,r}} \cdots \binom{n_0}{m_{1,0}, \ldots, m_{k,0}} \bmod p$$

Beweis. Folgt mit Induktion aus dem Satz von Lucas.

2 Der Fall $SL_2(\mathbb{F}_q(T))$

Mit Hilfe der im vorangegangen Kapitel vorgestellten Methoden werden nun die irreduziblen Darstellungen von $SL_2(\mathbb{F}_q(T))$ bestimmt. Hierzu wird zunächst ein Wurzelsystem nach dem Vorgehen von (Jantzen, 2003, S.172,173) berechnet und dann die dominanten Gewichte angegeben. Mit Hilfe von Steinberg's Tensorproduktsatz kann jeder einfache Modul zerlegt werden und die elementaren Bausteine sind $L(r,0) \cong sym^r(V)$ mit $0 \leq r < p$.

Sei $k = \mathbb{F}_q(T)$ mit $q = p^N$ für p eine Primzahl. $G := SL_2(k)$.
Wähle den maximalen Torus

$$T := \mathbb{D}_2 \cap SL_2 = \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \middle| t \in k^\times \right\}$$

Betrachte die Borel-Gruppe B mit $T \subset B$

$$B := \mathbb{T}_2 \cap SL_2 = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_1^{-1} \end{pmatrix} \middle| b_1 \in K^\times, b_2 \in k \right\}$$

Für die Charaktergruppe von T gilt

$$X(T) = \mathrm{Mor}(T, \mathbb{G}_m) = \left\{ \lambda : T \to \mathbb{G}_m : \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \mapsto t^{k_1} t^{-k_2} = t^{k_1 - k_2} \right\} \cong \mathbb{Z}^2/\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$$

Ein Charakter $\chi \in X(T)$ lässt sich also als $(k,0) = (k_1 - k_2, 0) \in \mathbb{Z}^2$ auffassen.

2.1 Wurzelsystem

Die Monomialmatrizen E_{ij} bilden eine Basis von $M_2(k)$.
Sei $X_{i,j}$ die dazu duale Basis. Dann ist

$$k\left[SL_2\right] = k\left[X_{1,1}, X_{1,2}, X_{2,1}, X_{2,2}\right] / \left(X_{1,1}X_{2,2} - X_{1,2}X_{2,1} - 1\right)$$

Sei $\epsilon_i := X_{i,i}|_T$. Dann kommutiert das folgende Diagramm

$$\begin{tikzcd} SL_2 \arrow[r, "X_{i,i}"] & \mathbb{G}_a \\ T \arrow[u, hook] \arrow[r, "\epsilon_i"] & \mathbb{G}_m \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Die ϵ_i bilden ein Erzeugendensystem von $X(T)$. Schreibe $\epsilon_1 = (1,0)$ und $\epsilon_2 = (0,1)$.

Außerdem ist

$$\mathfrak{sl}_2 = \text{Lie-Algebra der } 2\times 2\text{-Matrizen mit Spur } 0 \text{ mit Lie-Klammer } [X,Y] := XY - YX$$

Daher ist ein Wurzelsystem von SL_2 gegeben durch

$$R := \left\{\epsilon_1 - \epsilon_2, \epsilon_2 - \epsilon_1\right\} \cong \{(1,-1),(-1,1)\}$$

Setze als positive Wurzeln

$$R^+ := \left\{\epsilon_1 - \epsilon_2\right\} \cong \{(1,-1)\}$$

und als Wurzelbasis

$$S := R^+ \cong \{(1,-1)\}$$

2.2 Berechnung der dominanten Gewichte

Die Weyl-Gruppe von SL_2 ist

$$W = W(G,T) = \frac{N_G(T)}{Z_G(T)} = \frac{N_G(T)}{T} = \left\{\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right], \left[\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right]\right\} = \{w_1, w_2\} \cong S_2$$

Wähle für f das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$. Dann ist f W-invariant, denn für alle $(a_1,a_2),(b_1,b_2) \in X(T)$ gilt

$$f((w_2(a_1,a_2), w_2(b_1,b_2)) = f((a_2,-a_1),(b_2,-b_1)) = a_2b_2 + a_1b_1 = f((a_1,a_2),(b_1,b_2))$$

Dann sind die dominanten Gewichte

$$\begin{aligned}
X(T)_+ &= \left\{\lambda \in X(T) \middle| \left\langle \lambda, \alpha^\vee \right\rangle \geq 0 \forall \alpha \in R^+\right\}\\
&= \left\{\lambda \in X(T) \middle| 2\frac{(\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \geq 0 \forall \alpha \in R^+\right\}\\
&\cong \left\{(k,0) \in \mathbb{Z}^2 \middle| 2\frac{\langle (k,0),(1,-1)\rangle}{\langle (1,-1),(1,-1)\rangle} \geq 0\right\}\\
&= \left\{(k,0) \in \mathbb{Z}^2 \middle| 2\frac{k}{2} \geq 0\right\}\\
&= \left\{(k,0) \in \mathbb{Z}^2 \middle| k \geq 0\right\}
\end{aligned}$$

Analog folgt

$$X_1(T) \cong \left\{(k,0) \in \mathbb{Z}^2 \middle| 0 \leq k < p\right\}$$

2.3 Zerlegung der irreduziblen Darstellungen

Sei $\lambda \in X(T)_+$. Wie oben gesehen lässt sich λ als $(k, 0) \in \mathbb{Z}^2$ mit $k \geq 0$ auffassen. Sei

$$k = \sum_{i=0}^{m} p^i k_i$$

die p-adische Entwicklung von k.
Offensichtlich sind $(k_i, 0) \in X_1(T)$.
Mit Steinbergs Tensorproduktsatz folgt

$$L(\lambda) \cong \bigotimes_{i=0}^{m} L(k_i, 0)^{[i]}$$

2.4 Bestimmung von $L(r, 0)$ für $0 \leq r < p$

Sei $V = k^2$.

Theorem 2.1. *Für beliebiges $r \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$P_{sym^r(V)} = \left\{(a, b) \in \mathbb{N}_o^2 \middle| a + b = r\right\}$$

Dabei tritt jedes Gewicht mit einfacher Vielfachheit auf.

Beweis. Identifiziere $sym(V)$ mit dem Polynomring $k[X, Y]$. Dann entspricht $W := sym^r(V)$ für ein $r \in \mathbb{N}$ den homogenen Polynomen vom Grad r.
Ein Erzeugendensystem bilden die Monome $X^a Y^b$ mit $a + b = r$.
Da X dem ersten Einheitsvektor von V entspricht, hat X Gewicht $(1, 0)$ und Y Gewicht $(0, 1) = (-1, 0)$.
Ein Monom $X^a Y^b$ hat dann Gewicht $(a, b) = (a - b, 0)$.
$\Rightarrow$ Verschiedene Monome in $sym^r(V)$ haben verschiedene Gewichte.

Sei nun $\chi = (a, b) \in X(T)_+$ mit $a + b = r$. Dann gilt für den Gewichtsraum

$$W_\chi \supset \left\langle X^a Y^b \right\rangle_{k-Spann}$$

$$\Rightarrow W = \bigoplus_{\chi \in X(T)} W_\chi \supset \bigoplus_{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \text{ mit } a+b=r} \left\langle X^a Y^b \right\rangle_{k-Spann}$$

Da außerdem $\dim \left\langle X^a Y^b \right\rangle_{k-Spann} = 1$ und $\dim sym^r(V) = r + 1$ folgt für ein beliebiges χ

$$W_\chi = \begin{cases} \left\langle X^a Y^b \right\rangle_{k-Spann} & a + b = r \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Das heißt die Gewichte sind

$$P_{sym^r(V)} = \left\{(a, b) \in \mathbb{N}_0^2 \middle| a + b = r\right\} = \left\{(2a - r, 0) \in \mathbb{Z}^2 \middle| 0 \leq a \leq r\right\}$$

Die Vielfachheit für ein Gewicht ist $\dim W_\chi = 1$.

Bemerkung 2.2. Das höchste Gewicht von $sym^r(V)$ ist $(r, 0)$.

Theorem 2.3. *Für $0 \leq r < p$ gilt $L(r, 0) \cong sym^r(V)$.*

Bemerkung 2.4. Unter der Bijektion von 1.18 ist $sym^r(V)$ genau dann einfach als SL_2-Modul, wenn es einfach als $\mathfrak{sl}_2$-Modul, für $\mathfrak{sl}_2$ die Lie-Algebra von SL_2, ist.

Beweis. Sei $0 \neq w \in W$.
Da $W = \bigoplus_{\chi \in P_W} W_\chi$ lässt sich w in Komponenten $w = \bigoplus_{\chi \in P_W} w_\chi$ zerlegen. Sei $w_\chi \neq 0$ eine Nicht-Null-Komponente von w. Da außerdem $W_\chi = \left\langle X_1^m X_2^{r-m} \right\rangle_{k-Spann}$ für ein $m \in \{0, \dots, r\}$ ist $w_\chi = a \cdot X_1^m X_2^{r-m}$ für ein $a \in k$. Ohne Einschränkung gilt $a = 1$.

Vergleiche für das Folgende auch (Jantzen, 2003, II.2.16) und (Kirillov, 2008, Kapitel 5.1). Die Lie-Algebra von $SL_2(k)$ ist

$$\mathfrak{sl}_2 = \text{Lie-Algebra der } 2 \times 2\text{-Matrizen mit Spur } 0 \text{ mit Lie-Klammer } [X, Y] := XY - YX$$

Dann wird $\mathfrak{sl}_2$ von X_α, H_β für $\alpha \in R, \beta \in S$ erzeugt mit

$$X_{(1,-1)} = E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, X_{(-1,1)} = E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, H_1 = H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Diese erfüllen:

$$\left[E_{1,2}, E_{2,1}\right] = H, \left[H, E_{1,2}\right] = 2E_{1,2}, \left[H, E_{2,1}\right] = -2E_{2,1}$$

Behauptung:

- $E_{1,2} W_{(a_1,a_2)} \subset W_{(a_1+1,a_2-1)}$
- $E_{2,1} W_{(a_1,a_2)} \subset W_{(a_1-1,a_2+1)}$

Da $E_{i,j} X_l = \delta_{j,l} X_i$ ist, gilt für $a \cdot X_1^{a_1} X_2^{a_2} \in W_{(a_1,a_2)}$

$$\begin{aligned} E_{1,2} a \cdot X_1^{a_1} X_2^{a_2} &= a X_1^{a_1+1} X_2^{a_2-1} \\ E_{2,1} a \cdot X_1^{a_1} X_2^{a_2} &= a X_1^{a_1-1} X_2^{a_2+1} \end{aligned}$$

Beachte hierbei, dass $X_1^{r+1} = X_2^{r+1} = X_1^{-1} = X_2^{-1} = 0$ gesetzt wird.
Für $w_\chi = X_1^m X_2^{r-m}$ gilt dann:

$$\begin{aligned} E_{2,1}^m w_\chi &\in W_{(0,r)} = k X_2^r \\ E_{2,1}^{m+1} w_\chi &= 0 \end{aligned}$$

Also werden von $E_{2,1}^m$ alle Gewichtskomponenten von w von Gewichten kleiner als $(m, r-m)$ annuliert. $E_{2,1}^m w$ hat nur noch Gewichte zwischen $(r-m, m)$ und $(0, r)$, wobei $\left(E_{2,1}^m w\right)_{(0,r)} = \left(E_{2,1}^m w_\chi\right)_{(0,r)} \neq 0$, da $0 \leq m < p$.

Analoge Überlegungen für $E_{1,2}$ ergeben, das $E_{1,2}^r E_{2,1}^m w \neq 0$ ein reiner Gewichtsvektor zum Gewicht $(r, 0)$ ist.
Ohne Einschränkung gelte $E_{1,2}^r E_{2,1}^m w = X_1^r$.

Für $0 \leq i \leq r < p$ gilt dann: $E_{2,1}^{r-i} E_{1,2}^r E_{2,1}^m w = E_{2,1}^i X_1^r = X_1^i X_2^{r-i} \in k X_1^i X_2^{r-i} \setminus \{0\}$.

Also gilt: $\mathfrak{sl}_2 w = W$. Somit ist W irreduzibel.

Bemerkung 2.5. Beachte, dass $E_{1,2}^p = E_{2,2}^p = H^p = 0$ gilt. Das heißt, dass der Beweis sich nicht für ein allgemeines r in Charakterisitk p führen lässt. In Charakteristik 0 wäre hiermit aber die Irreduzibilität von $sym^r(V)$ für beliebiges $r > 0$ gezeigt.

3 Der Fall $GL_2(\mathbb{F}_q(T))$

Die Theorie für SL_2 ist derjenigen auf GL_2 sehr ähnlich. Hierbei tritt als weitere irreduzible Komponente $L(1,1) \cong \Lambda^2(V)$ auf.

Sei $k = \mathbb{F}_q(T)$ mit $q = p^N$ für p eine Primzahl. $G := GL_2(k)$.
Wähle den maximalen Torus

$$T := \mathbb{D}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} \middle| \, t_1, t_2 \in K^\times \right\}$$

Betrachte die Borel-Gruppe B mit $T \subset B$

$$B := \mathbb{T}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_3 \end{pmatrix} \middle| \, b_1, b_3 \in K^\times, b_2 \in K \right\}$$

Für die Charaktergruppe von T gilt:

$$X(T) = \mathrm{Mor}(T, \mathbb{G}_m) = \left\{ \lambda : T \to \mathbb{G}_m : \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} \mapsto t_1^{k_1} t_2^{k_2} \right\} \cong \mathbb{Z}^2$$

Das Wurzelsystem kann wie im Fall SL_2 gewählt werden (siehe Abschnitt 2.1), das heißt

$$R = \{\epsilon_1 - \epsilon_2, \epsilon_2 - \epsilon_1\} \cong \{(1,-1), (-1,1)\}$$

$$R^+ = \{\epsilon_1 - \epsilon_2\} \cong \{(1,-1)\}$$

$$S = R^+ \cong \{(1,-1)\}$$

3.1 Berechnung der dominanten Gewichte

Wähle für f das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$. Dann ist f invariant unter Operationen der Weyl-Gruppe (Vergleiche Abschnitt 2.2).

Die dominanten Gewichte sind

$$\begin{aligned}
X(T)_+ &= \left\{ \lambda \in X(T) \,\middle|\, \left\langle \lambda, \alpha^\vee \right\rangle \geq 0 \forall \alpha \in R^+ \right\} \\
&= \left\{ \lambda \in X(T) \,\middle|\, 2\frac{(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \geq 0 \forall \alpha \in R^+ \right\} \\
&\cong \left\{ (a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2 \,\middle|\, 2\frac{\langle (a_1, a_2), (1, -1) \rangle}{\langle (1, -1), (1, -1) \rangle} \geq 0 \right\} \\
&= \left\{ (a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2 \,\middle|\, 2\frac{a_1 - a_2}{2} \geq 0 \right\} \\
&= \left\{ (a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2 \,\middle|\, a_1 \geq a_2 \right\}
\end{aligned}$$

Analog folgt

$$X_1(T) \cong \left\{ (a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2 | 0 \leq a_1 - a_2 < p \right\}$$

3.2 Zerlegung der irreduziblen Darstellungen

Sei $\lambda \in X(T)_+$. Wie oben gesehen lässt sich λ als $(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2$ mit $a_1 \geq a_2$ auffassen. Sei

$$a_1 - a_2 = \sum_{i=0}^{m} p^i k_i$$

die p-adische Entwicklung.
Dann gilt:

$$\lambda = (a_1, a_2) = (a_2, a_2) + (a_1 - a_2, 0) = (a_2, a_2) + \sum_{k=0}^{m} p^i (k_i, 0) = p^0 (a_2 + k_0, a_2) + \sum_{i=1}^{m} p^i (k_i, 0)$$

Offensichtlich sind $(a_2 + k_0, a_2), (k_i, 0) \in X_1(T)$ für $1 \leq i \leq m$.
Mit Steinberg's Tensorproduktsatz folgt

$$L(\lambda) \cong L((a_2 + k_0, a_2)) \otimes \bigotimes_{i=1}^{m} L(k_i, 0)^{[i]}$$

Theorem 3.1. *$L(r, 0) \cong sym^r(V)$ für $0 \leq r < p$.*

Beweis. Sei $0 \leq r < p$.

- $sym^r(V)$ ist irreduzibel über SL_2 nach 2.3 $\Rightarrow sym^r(V)$ ist irreduzibel für GL_2.
- Wie in 2.1 sind die Gewichte

  $$P_{sym^r(V)} = \left\{ (a, b) \in \mathbb{N}_0^2 \middle| a + b = r \right\}$$

  Das höchste Gewicht von $sym^r(V)$ ist demnach $(r, 0)$.

3.3 Bestimmung von $L(a_2, a_2)$

Theorem 3.2. $L(1,1) \cong \Lambda^2(V)$

Beweis. Betrachte den G-Modul $\Lambda^2(V)$.
Eine Basis ist $e_1 \wedge e_2$. Dieser Vektor hat das Gewicht $(1,1)$.
Da $\dim \Lambda^2(V) = 1$ ist der Modul irreduzibel.
Das heißt, er ist nach 1.38 der einfache G-Modul mit Höchtsgewicht $(1,1)$.

Korollar. $L(a_2, a_2) \cong \left(\Lambda^2(V)\right)^{\otimes a_2}$

Beweis. Betrachte $L(1,1)^{(\alpha)}$, die Twistung von $L(1,1)$ mittels der Abbildung $\alpha : k \to k : x \mapsto a_2^{-1} \cdot x$. Diese hat das Gewicht (a_2, a_2) mit Vielfachheit 1, ist eindimensional, also irreduzibel. Nach den Gesetzen zur Berechnung der Gewichte von Tensorprodukten gilt die Behauptung.

3.4 Fazit

Für $\lambda = (a_1, a_2) \in X(T)_+$ sei die p-adische Entwicklung von $a_1 - a_2 = \sum_{i=0}^{m} p^i k_i$. Dann lässt sich der Höchstgewichtmodul zum Gewicht λ beschreibung durch

$$L(\lambda) \cong L((a_2 + k_0, a_2)) \otimes \bigotimes_{i=1}^{m} L(k_i, 0)^{[i]}$$

Behauptung: $L(k_0 + a_2, a_2) \cong L(k_0, 0) \otimes L(a_2, a_2)$
Für die Gewichte gilt

$$P_{L(a_2,a_2)} = \left\{(a_2, a_2)\right\}$$
$$P_{L(k_0,0)} = \left\{(a,b) \middle| a + b = k_0\right\}$$

Mit den Rechenregeln gilt dann

$$P_{L(k_0,0)\otimes L(a_2,a_2)} = \left\{(a + a_2, b + a_2) \middle| a + b = k_0\right\}$$

Betrachte auf der anderen Seite die k-lineare Abbildung $\alpha : k \to k : x \mapsto x - a_2$. Dann ist $L(k_0 + a_2, a_2) = L(k_0, 0)^{(\alpha)}$ und die Gewichte sind

$$P_{L(k_0+a_2,a_2)} = \left\{(a + a_2, b + a_2) \middle| (a,b) \in P_{(k_0,0)}\right\}$$

Also gilt für den Höchstgewichtmodul

$$\begin{aligned} L(\lambda) \cong & L((a_2 + k_0, a_2)) \otimes \bigotimes_{i=1}^{m} L(k_i, 0)^{[i]} \\ \cong & L(k_0, 0) \otimes L((a_2, a_2)) \otimes \bigotimes_{i=1}^{m} L(k_i, 0)^{[i]} \\ \cong & \left(\Lambda^2(V)\right)^{\otimes a_2} \otimes \bigotimes_{i=0}^{m} \left(sym^{k_i}(V)\right)^{[i]} \end{aligned}$$

4 Berechnung der Jordan-Hölder-Faktoren von $sym^r(V)$ für GL_2

Im Folgenden werde ich die Jordan-Hölder Faktoren von $sym^r(V)$ für $V = k^2$ mit $k = \mathbb{F}_q(T)$ ein Körper mit Charakterisitk p über der Gruppe $G = GL_2$ bestimmen.
Hierzu werde ich zunächst einige theoretische Grundlagen erarbeiten und dann ein Verfahren zur Berechnung der Faktoren vorstellen. Um diese zu bestimmen habe ich eine Funktion in *Sage* implementiert.

4.1 Der Satz von Jordan-Hölder

Sei M ein G-Modul.

Definition 4.1. Die Sockel-Serie oder Loewy-Serie von M ist

$$0 \subset \underset{1}{soc}(M) = \underset{G}{soc}(M) \subset \underset{2}{soc}(M) \subset \underset{3}{soc}(M) \subset \cdots$$

definiert durch $soc(M/soc_{i-1}M) = soc_i\, M/soc_{i-1}M$.

Bemerkung 4.2.

$$\bigcup_{i\geq 1} soc_i M = M$$

Definition 4.3.

- Eine Kompositionsreihe von M ist eine Reihe

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M$$

  von Untermoduln von M.

- Eine Zerlegungsreihe oder Jordan-Hölder-Reihe von M ist eine endliche Kompositionsreihe mit M_i/M_{i-1} einfach für alle $i > 0$.

Bemerkung 4.4. Sind $F_1, \ldots, F_r$ die einfachen Faktoren einer endliche dimensionalen G-Darstellung M, so gilt

$$P_M = \bigcup_{i=1}^{r} P_{F_i}$$

Bezeichne $m_\chi(M)$ die Vielfachheit vonχ in M und $m_\chi(F_i)$ die Vielfachheit von χ in F_i. Dann ist

$$m_\chi(M) = \sum_{i=1}^{r} m_\chi(F_i)$$

Theorem 4.5. *Satz von Jordan Hölder*

- *Jeder endlich-dimensionale G-Modul M besitzt eine Zerlegungsreihe.*
- *Jede Kompositionsreihe von M lässt sich zu einer Zerlegungsreihe verfeinern.*
- *Die Zahl der Faktoren isomorph zu einem gegebenen, einfachen G-Modul E ist unabhängig von der Zerlegung.*

Beweis. Siehe (Kumpera, 1980, Theorem 5.2).

Bemerkung 4.6. Nach Jordan-Hölder lässt sich die Sockel-Reihe zu einer Zerlegungsreihe verfeinern.

Bemerkung 4.7. Da die irreduziblen Moduln auf G eindeutig durch ihre Höchstgewichte beschrieben werden, kann auch die Zerlegungreihe eindeutig durch die Höchstgewichte der auftretenden Faktoren charakterisiert werden.

Beispiel 4.8. Die Jordan-Hölder-Faktoren von $sym^r(V)$ und $\left(sym^r(V^*)\right)^*$ über Gl_n sind gleich.

- Analog wie im Fall $n = 2$ gilt für ein beliebiges n:

$$P_{sym^r(V)} = \left\{ (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}_0^n \middle| \sum_{i=1}^n a_i = r \right\}$$

  (siehe Kapitel 5)

- Bezeichnet man mit $e_1^*, \dots, e_n^*$ die duale Basis zur Standardbasis. Dann hat e_i^* Gewicht $-\epsilon_i$. (Vergleiche (Derenthal, 2003, Satz 3.10)) Insgesamt ergibt sich also analog zum oberen Fall:

$$P_{sym^r(V^*)} = \left\{ (a_1, \dots, a_n) \in -\mathbb{N}_0^n \middle| \sum_{i=1}^n a_i = -r \right\}$$

  Für den Dualraum ergeben sich wieder genau die negativen Gewichte

$$P_{(sym^r(V^*))^*} = \left\{ (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}_0^n \middle| \sum_{i=1}^n a_i = r \right\}$$

Da die Jordan-Hölder-Faktoren durch die Angabe der Gewichte mit Vielfachheiten eindeutig bestimmt und die Gewichte der beiden Vektorräume gleich sind, gilt die Behauptung.

4.2 Einbettung von $L(r,0)$ in $sym^r(V)$

Theorem 4.9.

$$L(r,0) = \begin{cases} sym^r(V) & 0 \leq r \leq p-1 \\ \left\langle X_1^m X_2^{r-m} \middle| p \nmid \binom{r}{m} \right\rangle_{k-Spann} & sonst \end{cases}$$

Beweis. Mit Steinbergs Tensorproduktsatz gilt mit $r = \sum_{i=0}^m p^i r_i$ der p-adischen Entwicklung von r

$$\begin{aligned} L(r,0) &\cong \bigotimes_{i=0}^m L(r_i,0)^{[i]} \\ &\cong \bigotimes_{i=0}^m (sym^{r_i}(V))^{[i]} \end{aligned}$$

Gewichte von $sym^{r_i}(V)$ sind (a_i, b_i) mit $a_i + b_i = r_i$ mit Vielfachheit 1.
$\Rightarrow$ Gewichte von $(sym^{r_i}(V))^{[i]}$ sind $p^i(a_i, b_i)$ mit $a_i + b_i = r_i$ mit Vielfachheit 1.
$\Rightarrow$ Gewichte von $L(r,0)$ sind damit $\sum_{i=0}^m p^i(a_i, b_i)$ mit $a_i + b_i = r_i$, für $i = 0, \dots, m$ mit Vielfachheit 1
$\Rightarrow$ Gewichte von $L(r,0)$ sind $\sum_{i=0}^m p^i(a_i, b_i) = \left(\sum_{i=0}^m p^i a_i, \sum_{i=0}^m p^i b_i\right)$ mit $\sum_{i=0}^m p^i a_i + \sum_{i=0}^m p^i b_i = \sum_{i=0}^m p^i r_i = r$ und

$$a_i, b_i \leq r_i \forall i \overset{\sum_{i=0}^m a_i + \sum_{i=0}^m b_i = \sum_{i=0}^m r_i = r}{\Leftrightarrow} 0 \neq \binom{r_i}{a_i} \forall i \overset{r_i \leq p-1}{\Leftrightarrow} p \nmid \binom{r_i}{a_i} \forall i \overset{\text{Satz von Lucas}}{\Leftrightarrow} p \nmid \binom{r}{\sum_{i=0}^m p^i a_i}$$

$$\Rightarrow P_{L(r,0)} = \left\{ (a,b) \in \mathbb{N}_0^2 \middle| a + b = r \text{ und } p \nmid \binom{r}{a} \right\}$$

$$\Rightarrow L(r,0) = \begin{cases} sym^r(V) & 0 \leq r \leq p-1 \\ \left\langle X_1^m X_2^{r-m} \middle| p \nmid \binom{r}{m} \right\rangle_{k-Spann} & sonst \end{cases}$$

Bemerkung 4.10. Da $P_{L(r,0)} \subset P_{sym^r(V)}$ kann $L(r,0)$ in $sym^r(V)$ eingebettet werden.

$$0 \to L(r,0) \hookrightarrow sym^r(V) \to \text{Cokern} \to 0$$

Da außerdem die Gewichtsräume $L(r,0)_\chi$ von $L(r,0)$ alle Dimension eins haben, kommt jeder Faktor in der Zerlegungsreihe von $L(r,0)$ nur einfach vor.

Hierbei lassen sich die Gewichte vom Cokern wie folgt bestimmen:

$$\begin{aligned}
P_{Cokern} &= P_{sym^r(V)} - P_{L(r,0)} \\
&= \left\{ (a,b) \in \mathbb{N}_0^2 \middle| a+b=r \text{ und } p \middle| \binom{r}{a} \right\} \\
&\overset{\text{Satz von Lukas}}{=} \left\{ (a,b) \in \mathbb{N}_0^2 \middle| a+b=r \text{ und } r = \sum_{i=0}^{m} p^i r_i, a = \sum_{i=0}^{m} p^i a_i \text{ und } \exists i \text{ mit } 0 = \binom{r_i}{a_i} \right\} \\
&= \left\{ (a,b) \in \mathbb{N}_0^2 \middle| a+b=r \text{ und für } r = \sum_{i=0}^{m} p^i r_i, a = \sum_{i=0}^{m} p^i a_i \text{ und } \exists i \text{ mit } r_i < a_i \right\}
\end{aligned}$$

4.3 Eine Zerlegungsreihe von $sym^r(V)$

Um eine Kompositionsreihe von $sym^r(V)$ zu erhalten betrachten wir zunächste die Loewy-Reihe.

$$M := sym^r(V)$$

$$0 \subset V_1 = \underset{1}{soc}(M) = \underset{G}{soc}(H^0(r,0)) = L(r,0) \subset V_2 \subset \cdots$$

$$\underset{i}{soc}\, M / \underset{i-1}{soc}\, M = soc(M / \underset{i-1}{soc}\, M)$$

$$\underset{2}{soc}\, M / \underset{1}{soc}\, M = soc(M / \underset{1}{soc}\, M) = soc(M/L(r,0)) = soc(Cokern)$$

Die Loewy-Reihe soll nun zu einer Zerlegungsreihe verfeinert werden. Diese wird definiert durch

$$0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset M$$

mit $V_1 = L(r,0)$ und

$$F_{i-1} = V_i / V_{i-1} = L(\lambda_i)$$

mit λ_i dem Höchstgewicht vom Modul M/V_{i-1}.

4.4 Beispiele

4.4.1 p=3, r=4

$$M := sym^4(V)$$

Gewichte sind $P_M = \{(0,4),(1,3),(2,2),(3,1),(4,0)\}$

$$4 = 1 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 \Rightarrow V_1 = L(4,0) = L(1,0)^{[1]} \otimes L(1,0)$$

Gewichte sind $P_{V_1} = \{(0,4),(3,1),(1,3),(4,0)\}$
Der $Cokern$ hat damit die Gewichte $P_{Cokern} = P_M - P_{V_1} = \{(2,2)\}$
$\Rightarrow$ das höchste Gewicht vom $Cokern$ ist $(2,2)$ und $F_1 = L(2,2) = L(1,1) \otimes L(1,1)$. Dieser Modul hat Gewichte

$$P_{F_1} = \{(2,2)\}$$

$\Rightarrow L(2,2) \cong Cokern \Rightarrow$ der $Cokern$ ist irreduzibel und eine Zerlegungreihe ist

$$0 \subset L(4,0) \subset sym^4(V)$$

mit Faktor

$$L(2,2)$$

4.4.2 p=3, r=5

$$M := sym^5(V)$$

Gewichte sind $P_M = \{(0,5),(1,4),(2,3),(3,2),(4,1),(5,0)\}$

$$5 = 1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 \Rightarrow V_1 = L(5,0) = L(1,0)^{[1]} \otimes L(2,0)$$

Gewichte sind $P_{V_1} = \{(0,5),(1,4),(2,3),(3,2),(4,1),(5,0)\}$
$\Rightarrow V_1 \cong sym^5(V) \Rightarrow sym^5(V)$ ist irreduzibel und die Zerlegungsreihe ist

$$0 \subset sym^5(V) = L(5,0)$$

4.4.3 p=2, r=4

$$M := sym^4(V)$$

Gewichte sind $P_M = \{(0,4),(1,3),(2,2),(3,1),(4,0)\}$

$$4 = 1 \cdot 2^2 \Rightarrow V_1 = L(4,0) = L(1,0)^{[2]}$$

Gewichte sind $P_{V_1} = \{(0,4),(4,0)\}$
Der $Cokern$ hat damit die Gewichte $P_{Cokern} = P_M - P_{V_1} = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$
$\Rightarrow$ das höchste Gewicht vom $Cokern$ ist $(3,1)$ und $F_0 = L(3,1) = L(1,1) \otimes L(2,0) = L(1,1) \otimes L(1,0)^{[1]}$. Dieser Modul hat Gewichte

$$P_{F_1} = \{(3,1),(1,3)\}$$

$\Rightarrow$ da $F_1 = V_2/V_1$ gilt

$$P_{V_2} = P_{F_1} + P_{V_1} = \{(0,4),(3,1),(1,3),(4,0)\}$$

Dann ist $C := M/V_2$ der Modul mit Gewichtsmenge $P_C = P_M - P_{V_2} = \{(2,2)\}$. Wie im letzten Fall gilt $C = L(2,2)$.
Eine Zerlegungsreihe ist

$$0 \subset L(4,0) \subset V_2 \subset sym^4(V)$$

mit Faktoren

$$L(3,1) \text{ und } L(2,2)$$

4.5 Ergebnisse

Hier dargestellt sind die Höchstgewichte der Faktoren von $sym^r(V)$ in Charakterisitk p. Hinzu kommt jeweils noch der Faktor $L(r,0)$. Die Ergebnisse wurden mit *Sage* berechnet. Für das Programm siehe auch 7.1.

p \ r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2		(1, 1)		(3, 1) (2, 2)	(3, 2)	(5, 1) (3, 3)		(7, 1) (6, 2) (4, 4)	(7, 2) (5, 4)	(9, 1) (7, 3) (6, 4) (5, 5)
3			(2, 1)	(2, 2)		(5, 1)	(5, 2)		(8, 1) (6, 3)	(8, 2) (7, 3)
5					(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)		(9, 1)
7							(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)

p \ r	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	(7, 4)	(11, 1) (10, 2) (7, 5) (6, 6)	(11, 2) (7, 6)	(13, 1) (11, 3) (7, 7)		(15, 1) (14, 2) (12, 4) (8, 8)	(15, 2) (13, 4) (9, 8)	(17, 1) (15, 3) (14, 4) (13, 5) (10, 8) (9, 9)	(15, 4) (11, 8)	(19, 1) (18, 2) (15, 5) (14, 6) (12, 8) (11, 9)
3	(8, 3)	(11, 1) (8, 4) (6, 6)	(11, 2) (8, 5) (7, 6)	(8, 6)	(14, 1) (8, 7)	(14, 2) (8, 8)		(17, 1) (15, 3)	(17, 2) (16, 3)	(17, 3)
5	(9, 2)	(9, 3)	(9, 4)		(14, 1)	(14, 2)	(14, 3)	(14, 4)		(19, 1)
7	(6, 5)	(6, 6)		(13, 1)	(13, 2)	(13, 3)	(13, 4)	(13, 5)	(13, 6)	
11	(10, 1)	(10, 2)	(10, 3)	(10, 4)	(10, 5)	(10, 6)	(10, 7)	(10, 8)	(10, 9)	(10, 10)
13			(12, 1)	(12, 2)	(12, 3)	(12, 4)	(12, 5)	(12, 6)	(12, 7)	(12, 8)
17							(16, 1)	(16, 2)	(16, 3)	(16, 4)
19									(18, 1)	(18, 2)

4.6 Ein Prüflemma

Theorem 4.11. *$sym^r(V)$ ist irreduzibel $\Leftrightarrow$ für die Primfaktorzerlegung $r = \sum_{i=0}^{m} r_i p^i$ von r gilt $r_i = p - 1 \forall i \in \{0, \dots, m-1\}$.*

Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned}
sym^r(V) \text{ ist irreduzibel} &\Leftrightarrow sym^r(V) = L(r,0) = \left\langle X_1^m X_2^{r-m} \middle| p \nmid \binom{r}{m} \right\rangle_{k-Spann} \\
&\Leftrightarrow \left\langle X_1^m X_2^{r-m} \right\rangle_{k-Spann} = \left\langle X_1^m X_2^{r-m} \middle| p \nmid \binom{r}{m} \right\rangle_{k-Spann} \\
&\Leftrightarrow \nexists 0 \leq m \leq r : p \mid \binom{r}{m} \\
&\overset{\text{Satz von Lukas}}{\Leftrightarrow} \forall i \in \{0, \dots, m-1\} \nexists 0 \leq m < p : p \mid \binom{r_i}{m} \\
&\Leftrightarrow \nexists i \in \{0, \dots, m-1\} : r_i < p - 1 \\
&\Leftrightarrow r_i = p - 1 \forall i \in \{0, \dots, m-1\}
\end{aligned}$$

5 Berechnung der Jordan-Hölder-Faktoren von $sym^r(V)$ für GL_n

Analog wie für $n = 2$ lassen sich auch für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die Jördan-Hölder-Faktoren von $sym^r(V)$ bestimmen. Hier ist $V = k^n$ für $k = \mathbb{F}_q(T)$. Hauptquelle war Jantzen (2003).
T seien die invertierbaren Diagonalmatrizen und B die invertierbaren, oberen Dreiecksmatrizen. Dann gilt

$$X(T) = Mor(T, \mathbb{G}_m) \cong \mathbb{Z}^n$$

5.1 Wurzelsystem

Für die Lie-Algebra gilt:

$$\mathfrak{gl}_\mathfrak{n} = \left[X_{1,1}, \dots, X_{n,n}\right]$$

Sei $\epsilon_i := X_{i,i}|T$.
Als Wurzelsystem wählen wir

$$\begin{aligned} R &:= \left\{\epsilon_i - \epsilon_j \middle| 1 \leq i, j \leq n, i \neq j\right\} \\ R^+ &:= \left\{\epsilon_i - \epsilon_j \middle| 1 \leq i < j \leq n\right\} \\ S &:= \left\{\epsilon_i - \epsilon_{i+1} \middle| 1 \leq i < n\right\} \end{aligned}$$

5.2 Berechnung der dominanten Gewichte

Analog zum Fall $n = 2$ wähle für f das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{Z}^n$. Dann ist f invariant unter der Weyl-Gruppe W. Die dominaten Gewichte sind

$$\begin{aligned} X(T)_+ &= \left\{\lambda \in X(T) \middle| \left\langle \lambda, \alpha^\vee \right\rangle \geq 0 \forall \alpha \in R^+\right\} \\ &\cong \left\{a \in \mathbb{Z}^n \middle| (a, \alpha) \geq 0 \forall \alpha \in R^+\right\} \\ &= \left\{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n \middle| a_i \geq a_j \forall 1 \leq i < j \leq n\right\} \\ X_1(T) &= \left\{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n \middle| 0 \leq a_i - a_{i+1} < p \forall 1 \leq i < n\right\} \end{aligned}$$

5.3 Zerlegung der irreduziblen Darstellungen

Sei $\lambda = (a_1, \dots, a_n) \in X(T)_+$. Dann lässt sich λ nach dem folgenden Vorgehen zerlegen

- $\lambda = (a_1 - a_2, 0, \dots, 0) + (a_2 - a_3, a_2 - a_3, 0, \dots, 0) + \dots + (a_n, \dots, a_n)$

- Nun können die einzelnen Summanden p-adisch entwickelt werden: $a_i - a_{i+1} = \sum_{j=0}^{m_i} p^j b_{i,j}$
- $\lambda = \sum_{j=0}^{m=max(m_i)} p^j \left(\sum_{i=0}^{n} b_{i,j}, \sum_{i=1}^{n} b_{i,j}, \dots, b_{n,j}\right) =: \sum_{j=0}^{m} p^j \lambda_j$

Dann ist $\lambda_j \in X_1(T)$ und Steinbergs Tensorproduktsatz besagt

$$L(\lambda) = \bigotimes_{j=0}^{m} L(\lambda_j)^{[j]}$$

5.4 Gewichte von $sym^r(V)$

Über GL_n lässt sich $sym^r(V)$ mit den homogenen Polyonomen vom Grad r über dem Ring $k[X_1, \dots, X_n]$ auffassen. Herbei hat X_i Gewicht ϵ_i. Das Polynom $X_1^{a_1} \cdots X_n^{a_n}$ hat dann Gewicht $(a_1, \dots, a_n)$. Nach der Definition von homogenen Polynomen sind die Gewichte dann

$$P_{sym^r(V)} = \left\{ (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}_0^n \,\middle|\, \sum_{i=0}^{n} a_i = r \right\}$$

5.5 Bestimmung einiger irreduzibler Bausteine

Theorem 5.1. *$sym^r(V)$ ist irreduzibel für $0 \leq r < p$.*

Beweis. Sei $0 \neq w \in W := sym^r(V)$.
Da $W = \bigoplus_{\chi \in P_W} W_\chi$ lässt sich w in Komponenten $w = \bigoplus_{\chi \in P_W} w_\chi$ zerlegen. Sei $w_\chi \neq 0$ eine Nicht-Null-Komponente von w. Da außerdem $W_\chi = \left\langle X_1^{a_1} \cdots X_n^{a_n} \right\rangle_{k-Spann}$ für $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}_0$ mit $\sum_{i=1}^{n} a_i = r$ ist $w_\chi = a \cdot X_1^{a_1} \cdots X_n^{a_n}$ für ein $a \in k$. Ohne Einschränkung gilt $a = 1$.

Identifiziere die Lie-Algebra $\mathfrak{gl}_\mathfrak{n}$ mit $M_n(k)$. Setze $X_\alpha = E_{i,j}$ für $\alpha = \epsilon_i - \epsilon_j \in R$.

Für die Gewichtsräume gilt dann wegen $E_{i,j} X_l = \delta_{j,l} X_i$

$$E_{i,j} W_{(a_1,\dots,a_n)} \subset W_{(a_1,\dots,a_i+1,\dots,a_j-1,\dots,a_n)}$$

Für $w_\chi = X_1^{a_1} \cdots X_n^{a_n}$ gilt dann

$$E_{n,1}^{a_n} w_\chi \in W_{(0,a_2,\dots,a_n+a_1)}$$
$$w'_\chi := E_{2,1}^{a_2} \cdots E_{n,1}^{a_n} w_\chi \in W_{(0,\dots,0,\sum_{i=1}^{n} a_i = r)} = kX_n^r$$

Bei dieser Multiplikation werden alle kleineren Gewichtskomponenten annuliert. w'_χ hat nur noch Gewichte zwischen $(0, \dots, r)$ und $(a_1, \dots, a_n)$ bezüglich $\leq$.

$$E_{n-1,n}^r w'_\chi \in W_{(0,\dots,0,r,0)}$$
$$w''_\chi := E_{1,2}^r \cdots E_{n-1,n}^r w' \chi \in W_{(r,0,\dots,0)}$$

Bei dieser Rechnung werden alle größeren Gewichtskomponenten annuliert.
Insgesamt ist dann

$$w' := E_{1,2}^r \cdots E_{n-1,n}^r \cdot E_{2,1}^{a_2} \cdots E_{n,1}^{a_n} w = w''_\chi \in W_{(r,0,\dots,0)}$$

Ohne Einschränkung gilt $w' = X_1^r$.
Für $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}_0^n$ mit $\sum_{i=0}^n a_i = r$ gilt dann

$$E_{2,1}^{a_2} \cdots E_{n,1}^{a_n} w' \in W_{(a_1,\dots,a_n)} = kX_1^{a_1} \cdots X_n^{a_n}$$

.

Also ist $\mathfrak{gl}_\mathfrak{n} w = W$ und somit ist W irreduzibel.

Theorem 5.2.

$$L(r,0,\dots,0) \cong \begin{cases} sym^r(V) & 0 \le r < p \\ \left\langle X_1^{a_1} \cdots X_n^{a_n} \middle| \sum_{i=0}^n a_i = r \text{ und } p \nmid \binom{r}{a_1,\dots,a_n} \right\rangle_{k-Spann} & sonst \end{cases}$$

Beweis. Sei $r = \sum_{i=0}^m r_i p^i$ die p-adische Zerlegung von r. Mit Hilfe von Steinbergs Tensorproduktsatz ergibt sich

$$L(r,0,\dots,0) \cong \bigoplus_{i=0}^m L(r_i,0,\dots,0)^{[i]} \cong \bigoplus_{i=0}^m (sym^{r_i}(V))^{[i]}$$

Da $P_{sym^{r_i}} = \left\{ (a_{i,1},\dots,a_{i,n}) \in \mathbb{N}_0^n \middle| \sum_{j=0}^n a_{i,j} = r_i \right\}$ gilt mit den Rechenregeln für Gewichte beim Frobeniustwist

$$P_{(sym^{r_i})^{[i]}} = \left\{ \left(p^i \cdot a_{i,1},\dots,p^i \cdot a_{i,n}\right) \in \mathbb{N}_0^n \middle| \sum_{j=0}^n a_{i,j} = r_i \right\}$$

Mit den Rechenregeln für Gewichte bei Tensorprodukten ergibt sich

$$P_{L(r,0,\dots,0)} = \left\{ \left(\sum_{i=0}^m p^i a_{i,1},\dots,\sum_{i=0}^m p^i a_{i,n} \right) \in \mathbb{N}_0^n \middle| \sum_{j=0}^n a_{i,j} = r_i \forall i \right\}$$

Außerdem gilt

$$\sum_{j=0}^n a_{i,j} = r_i \forall i \Leftrightarrow 0 \neq \binom{r_i}{a_{i,1},\dots a_{i,n}} \forall i \overset{r_i<p}{\Leftrightarrow} p \nmid \binom{r_i}{a_{i,1},\dots a_{i,n}} \forall i$$

$$\overset{1.55}{\Leftrightarrow} p \nmid \binom{r}{\sum_{i=0}^m p^i a_{i,1},\dots,\sum_{i=0}^m p^i a_{i,n}}$$

$$\Rightarrow P_{L(r,0,\dots,0)} = \left\{ (a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{N}_0^n \middle| \sum_{i=1}^n a_i = r \text{ und } p \nmid \binom{r}{a_1,\dots,a_n} \right\}$$

Theorem 5.3. $L(\epsilon_1 + \ldots + \epsilon_m) = L(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0) \cong \Lambda^m(V)$

Beweis. Sei $1 \leq m \leq n$ und $\{e_i\}$ die Standardbasis auf V. Dann ist $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_m}$ mit $1 \leq i_1 < \ldots < i_m \leq n$ eine Basis von $\Lambda^m V$. Ordnen wir wie gewohnt e_i das Gewicht ϵ_i zu, so hat $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_m}$ das Gewicht $\epsilon_{i_1} + \ldots + \epsilon_{i_m}$.
Alle Basiselemente haben unterschiedliche Gewichte. Somit ist deren Vielfachheit jeweils eins und das Höchstgewicht von $\Lambda^m(V)$ ist $(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$.

Behauptung: $\Lambda^m(V)$ ist irreduzibel
Sei $0 \neq w \in \Lambda^m(V)$ mit Gewichtskomponente $0 \neq w_\chi$. Nach obigen Berechnung zu den Gewichtsräumen ist $\chi = \epsilon_{i_1} + \ldots + \epsilon_{i_m}$ mit $1 \leq i_1 < \ldots < i_m \leq n$. Mit den Bezeichnung aus 5.1 gilt dann:

$$E_{n-m+1,i_1} E_{n-m+2,i_2} \cdots E_{n,i_m} w_\chi \in L(0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1)$$

Von der Matrixmultiplikation werden alle Gewichte kleiner als χ annuliert.

$$w' := E_{1,n-m+1} E_{2,n-m+2} \cdots E_{m,n} E_{n-m+1,i_1} E_{n-m+2,i_2} \cdots E_{n,i_m} w \in L(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$$

Dies gilt, da bei der Matrixmultiplikation zunächst alle Gewichte, die kleiner als χ sind und danach alle, die größer als χ sind annuliert werden.
Für ein beliebiges $\mu = \epsilon_{j_1} + \ldots + \epsilon_{j_m}$ mit $1 \leq j_1 < \ldots < j_m \leq n$ gilt dann

$$E_{j_1,1} \cdots E_{j_n,m} w \in \left\langle e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_n} \right\rangle_{k-Spann}$$

Das heißt $\mathfrak{gl}_n w = \Lambda^m(V)$ und somit ist $\Lambda^m(V)$ irreduzibel.

5.6 Ergebnisse

Hier dargestellt sind die Höchstgewichte der Faktoren von $sym^r(V)$ und ihre Dimension in Charakterisitk p. Hinzu kommt jeweils noch der Faktor $(r, 0, \dots, 0)$. Die Berechnungen wurden in *Sage* ausgeführt. Für den Code siehe 7.2.
Beachte, dass der Algorithmus die unbewiesene Aussage verwendet, dass die Gewichte von $L(\lambda)$ für $\lambda \in X_1(T)$ in Charakterisitk 0 und in Charakterisitk p übereinstimmen.

5.6.1 n=3

p \ r	1	2	3	4	5	6
2		$(1,1,0);3$	$(1,1,1);1$	$(3,1,0);9$ $(2,2,0);3$	$(3,2,0);9$ $(3,1,1);3$	$(5,1,0);9$ $(3,3,0);9$ $(2,2,2);1$
3			$(2,1,0);7$	$(2,2,0);6$	$(2,2,1);3$	$(5,1,0);21$ $(2,2,2);1$
5					$(4,1,0);18$	$(4,2,0);19$

p \ r	7	8	9	10	11	12
2	$(5,1,1);3$ $(3,3,1);3$ $(3,2,2);3$	$(7,1,0);27$ $(6,2,0);9$ $(4,4,0);3$ $(3,3,2);3$	$(7,2,0);27$ $(7,1,1);9$ $(5,4,0);9$ $(3,3,3);1$	$(9,1,0);9$ $(7,3,0);27$ $(6,4,0);9$ $(6,2,2);3$ $(5,5,0);9$	$(9,1,1);3$ $(7,4,0);27$ $(7,3,1);9$ $(7,2,2);9$ $(5,5,1);3$	$(11,1,0);27$ $(10,2,0);9$ $(7,5,0);27$ $(7,3,2);9$ $(6,6,0);9$ $(4,4,4);1$
3	$(5,2,0);18$	$(5,2,1);9$	$(8,1,0);42$ $(6,3,0);7$ $(5,2,2);3$	$(8,2,0);36$ $(7,3,0);21$	$(8,3,0);42$ $(8,2,1);18$	$(11,1,0);21$ $(8,4,0);49$ $(8,2,2);6$ $(6,6,0);6$
5	$(4,3,0);18$	$(4,4,0);15$	$(4,4,1);10$	$(9,1,0);54$ $(4,4,2);6$	$(9,2,0);57$ $(4,4,3);3$	$(9,3,0);54$ $(4,4,4);1$
7	$(6,1,0);33$	$(6,2,0);36$	$(6,3,0);37$	$(6,4,0);36$	$(6,5,0);33$	$(6,6,0);28$
11					$(10,1,0);75$	$(10,2,0);82$

5.6.2 n=4

p \ r	1	2	3	4	5	6
2		$(1,1,0,0);6$	$(1,1,1,0);4$	$(3,1,0,0);24$ $(2,2,0,0);6$ $(1,1,1,1);1$	$(3,2,0,0);24$ $(3,1,1,0);16$	$(5,1,0,0);24$ $(3,3,0,0);36$ $(3,1,1,1);4$ $(2,2,2,0);4$
3			$(2,1,0,0);16$	$(2,2,0,0);19$	$(2,2,1,0);16$	$(5,1,0,0);64$ $(2,2,2,0);10$
5					$(4,1,0,0);52$	$(4,2,0,0);68$

p \ r	7	8	9	10	11
2	$(5,1,1,0);16$ $(3,3,1,0);24$ $(3,2,2,0);16$	$(7,1,0,0);96$ $(6,2,0,0);24$ $(5,1,1,1);4$ $(4,4,0,0);6$ $(3,3,2,0);24$ $(3,3,1,1);6$ $(2,2,2,2);1$	$(7,2,0,0);96$ $(7,1,1,0);64$ $(5,4,0,0);24$ $(3,3,3,0);16$ $(3,2,2,2);4$	$(9,1,0,0);24$ $(7,3,0,0);144$ $(7,1,1,1);16$ $(6,4,0,0);24$ $(6,2,2,0);16$ $(5,5,0,0);36$ $(3,3,3,1);4$ $(3,3,2,2);6$	$(9,1,1,0);16$ $(7,4,0,0);96$ $(7,3,1,0);96$ $(7,2,2,0);64$ $(5,5,1,0);24$ $(3,3,3,2);4$
3	$(5,2,0,0);76$ $(2,2,2,1);4$	$(5,2,1,0);64$ $(2,2,2,2);1$	$(8,1,0,0);160$ $(6,3,0,0);16$ $(5,2,2,0);40$	$(8,2,0,0);190$ $(7,3,0,0);64$ $(5,2,2,1);16$	$(8,3,0,0);160$ $(8,2,1,0);160$ $(5,2,2,2);4$
5	$(4,3,0,0);80$	$(4,4,0,0);85$	$(4,4,1,0);80$	$(9,1,0,0);208$ $(4,4,2,0);68$	$(9,2,0,0);272$ $(4,4,3,0);52$
7	$(6,1,0,0);116$	$(6,2,0,0);149$	$(6,3,0,0);180$	$(6,4,0,0);206$	$(6,5,0,0);224$
11					$(10,1,0,0);360$

6 Fazit

Die irreduziblen Darstellungen einer linearen algebraischen Gruppe lassen sich durch die Angabe der dominanten Gewichte dieser Gruppe charakterisieren.
Für SL_2 über $\mathbb{F}_q(T)$ sind die dominanten Gewichte gerade isomorph zu $\left\{(a,0) \in \mathbb{N}_0^2\right\}$. Des Weiteren gilt für jeden einfach Modul $L(r,0)$ mit $r \geq 0$

$$L(r,0) \cong \begin{cases} sym^r(V) & 0 \leq r < p \\ \left\langle X_1^m X_2^{r-m} \middle| p \nmid \binom{r}{m} \right\rangle_{k-Spann} & sonst \end{cases}$$

Im Fall GL_2 sind die dominanten Gewichte $X(T)_+ \cong \left\{(a_1,a_2) \in \mathbb{Z}^2 \middle| a_1 \geq a_2\right\}$. Analog zum Fall SL_2 ist $L(r,0) \cong sym^r(V)$ für $0 \leq r < p$ und $L(1,1) \cong \Lambda^2(V)$. Mit Hilfe von Steinbergs Tensorproduktsatz lässt sich jeder einfache Modul $L(a_1,a_2)$ folgendermaßen zerlegen

Sei $a_1 - a_2 = \sum_{i=0}^m p^i k_i$ die p-adische Entwicklung. Dann gilt

$$\begin{aligned} L(a_1,a_2) &\cong L((a_2+k_0,a_2)) \otimes \bigotimes_{i=1}^m L(k_i,0)^{[i]} \\ &\cong (\Lambda^2(V))^{\otimes a_2} \otimes \bigotimes_{i=0}^m sym^{k_i}(V)^{[i]} \end{aligned}$$

Die Jordan-Hölder Faktoren von $sym^r(V)$ über GL_2 lassen sich induktiv bestimmen

- Setze $V_1 = L(r,0)$. Dies ist das erste Element der Zerlegungsreihe.
- Definiere $0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset sym^r(V)$ durch

  $$F_{i-1} = V_i/V_{i-1} = L(\lambda_i)$$

  mit λ_i dem Höchstgewicht vom Modul $sym^r(V)/V_{i-1}$.
- Die F_i sind die Jordan-Hölder-Faktoren von $sym^r(V)$

Für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ lassen sich dich die dominanten Gewichte analog bestimmen. Sie sind isomorph zu $\left\{(a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{Z}^n \middle| a_1 \geq \cdots \geq a_n\right\}$. Für die Berechnung der Jordan-Hölder Faktoren dient die Zerlegung der Höchstgewichtmoduln nach folgendem Algorithmus aus Abschnitt 5.3
Sei $\lambda = (a_1,\ldots,a_n) \in X(T)_+$.

- $\lambda = (a_1 - a_2, 0, \ldots, 0) + (a_2 - a_3, a_2 - a_3, 0, \ldots, 0) + \ldots + (a_n, \ldots, a_n)$
- Nun können die einzelnen Summanden p-adisch entwickelt werden: $a_i - a_{i+1} = \sum_{j=0}^{m_i} p^j b_{i,j}$

- $\lambda = \sum_{j=0}^{m=max(m_i)} p^j \left(\sum_{i=0}^{n} b_{i,j}, \sum_{i=1}^{n} b_{i,j}, \dots, b_{n,j}\right) =: \sum_{j=0}^{m} p^j \lambda_j$

Dann ist $\lambda_j \in X_1(T)$ und Steinbergs Tensorproduktsatz besagt, dass

$$L(\lambda) = \bigotimes_{j=0}^{m} L(\lambda_j)^{[j]}$$

Einige Höchstgewichtmoduln lassen sich explizit angeben. So ist

$$L(r, 0, \dots, 0) \cong \begin{cases} sym^r(V) & 0 \leq r < p \\ \left\langle X_1^{a_1} \cdots X_n^{a_n} \middle| \sum_{i=0}^{n} a_i = r \text{ und } p \nmid \binom{r}{a_1, \dots, a_n} \right\rangle_{k-Spann} & sonst \end{cases}$$

und

$$L(\epsilon_1 + \dots + \epsilon_m) = L(1, \dots, 1, 0, \dots, 0) \cong \Lambda^m(V)$$

Die Jordan-Hölder Faktoren lassen sich dann mit dem Algorithmus für GL_2 bestimmen.

Die Ergebnisse wurden mit Hilfe von *Sage* berechnet und finden sich in Abschnitt 4.5 und 5.6.

7 Anhang

7.1 Algorithmus für GL_2

Mit dem folgenden Algorithmus können die Höchstgewichte der Jordan-Hölder-Faktoren von $sym^r(V)$ über $GL_2(\mathbb{F}_q(T))$ bestimmt werden.

Hierbei wird wie in 4.3 eine Zerlegungsreihe von $sym^r(V)$ über die Gewichte bestimmt.

- Setze hierzu $M := sym^r(V)$. Die Gewichte von M sind $P_M = \{(i, r-i) | 0 \leq i \leq r\}$.
- Berechne die Gewichte von $L(r, 0)$.
- Die Gewichte vom Cokern der Abbildung $L(r, 0) \to M$ sind $P_M - P_{L(r,0)}$.
- Bestimme das höchste Gewicht h vom Cokern.
- Berechne die Gewichte von $L(h)$.
- Die Gewichte vom Cokern der Abbildung $L(h) \to M$ sind $P_M - P_{L(h)}$.
- Führe dies induktiv fort.

Die Gewichte von einem Höchstgewichtmodul $L(h)$ für $h = (a_1, a_2) \in X(T)_+$ lassen sich wie in Abschnitt 3.4 bestimmen.

- Da $(a_1, a_2) \in X(T)_+$ ist $a_1 \geq a_2$ und $L(a_1, a_2) \cong L(a_2, a_2) \otimes L(a_1 - a, 2, 0)$.
  Außerdem ist $L(a_2, a_2) \cong \left(\Lambda^2(V)\right)^{\otimes a_2}$ und $P_{L(a_2,a_2)} = (a_2, a_2)$.
- Um die Gewichte von $L(a_1 - a_2, 0)$ zu bestimmen, wird zunächst $a_1 - a_2$ p-adisch entwickelt, das heißt $a_1 - a_2 = \sum_{i=0}^{m} p^i k_i$.
  Mit Steinbergs Tensorproduktsatz ist dann

$$L(a_1 - a_2, 0) \cong \bigotimes_{i=0}^{m} \left(L(k_i, 0)\right)^{[i]} \cong \bigotimes_{i=0}^{m} \left(sym^{k_i}(V)\right)^{[i]}$$

- Die Gewichte von $sym^{k_i}(V)$ sind $P_{sym^{k_i}(V)} = \left\{(j, k_i - j) \middle| 0 \leq j \leq k_i\right\}$.
- Mit den Rechenregeln für Gewichte von Frobeniustwistungen aus 1.51 ergibt sich, dass

$$P_{\left(sym^{k_i}(V)\right)^{[i]}} = \left\{\left(p^i \cdot j, p^i \cdot (k_i - j)\right) \middle| 0 \leq j \leq k_i\right\}$$

- Mit den Rechenregeln für Gewichte von Tensorprodukten aus 1.52 lassen sich Gewichte von $L(a_1, a_2)$ zusammensetzen, denn

$$L(a_1, a_2) = L(a_2, a_2) \otimes \bigotimes_{i=0}^{m} \left(sym^{k_i}(V)\right)^{[i]}$$

Diesen Algorithmus habe ich wie folgt in *Sage* implementiert:

```
sage: def faktoren(r,p):
...       Ergebnis =[]
...
...       K = Zp(p, print_mode='bars')
...       def prim(zahl): #p-adische Entwicklung von zahl
...           a=K(zahl)
...           import re
...           var = re.findall(r"(\d\d\d|\d\d|\d)",str(a))
...           var.reverse()
...           var = map(int, var)
...           return var
...
...       pr = prim(r) #die p-adische Entwicklung von r
...
...       def loeschen(Q,C): #Gewichtsbestimmung vom nächsten
Zerlegungsreihenelement
...           P = Q[:]
...           for j in range(0,len(C)):
...              P.remove(C[j])
...           return P
...
...       def symgewichte(k): #Gewichte von sym^k(V)
...           P = [[i,k-i] for i in range (0,k+1)]
...           return P
...
...       def gewichte(h): #Bestimmen der Gewichte von L(h)
...           P=[]
...           map(int,h)
...           a = h[1] #Anzahl von L(1,1)
...           P.append([[a,a]])  #Füge Gewicht von L(a,a) zur Liste hinzu
...           h = [h[0]-h[1],0]
...           h = prim(h[0])
...           h = map(int, h)
...           for j in range(0,len(h)):
...               P.insert(0,symgewichte(h[j])) #Füge Gewicht von L(a_i,0)
 zur Liste hinzu
```

```
...                 for i in range(0,len(P[0])):
...                     P[0][i][0]=(p**j)*P[0][i][0] #Gewichte *p^j
für j-fache Twistung
...                     P[0][i][1]=(p**j)*P[0][i][1]
...             while len(P)>1: #Aufaddieren der Gewichte
(Gewicht vom Tensorprodukt)
...                 Q=[]
...                 for i in range(0,len(P[0])):
...                     for l in range(0,len(P[1])):
...                         Q.append([P[0][i][0]+P[1][l][0],
P[0][i][1]+P[1][l][1]])
...                 P[0]=Q
...                 del P[1]
...             P = P[0]
...             return P
...
...         PM = symgewichte(r)#die Gewichte von sym^r(V)
...         h=[r]
...         h.append(0)
...         PV1 = gewichte(h) #Die Gewichte von L(r,0)
...
...         while len(PV1)<len(PM):
...             PC1 = loeschen(PM,PV1) #Die Gewichte vom Cokern
...             h = max(PC1) #Das Höchstgewicht vom Faktor
...             Ergebnis =  Ergebnis + [map(int,h)]
...             PF = gewichte(h) #Die Gewichte vom Faktor
...             PV1 = PF + PV1 #Die Gewichte vom nächsten Element
der Zerlegungsreihe
...
...         return Ergebnis
```

7.2 Algorithmus für GL_n

Mit dem nachfolgenden Algorithmus können die Jordan-Hölder Faktoren von $sym^r(V)$ für ein beliebiges n berechnet werden.

Die Zerlegungsreihe wird nach demselben Algorithmus wie bei GL_2 bestimmt (siehe hierzu Abschnitt 7.1). Die Gewichte vom Höchstgewichtmodul $L(h)$ für $h = (a_1, \dots, a_n) \in X(T)_+$ lassen sich wie in Abschnitt 5.3 bestimmen.

- $\lambda = (a_1 - a_2, 0, \dots, 0) + (a_2 - a_3, a_2 - a_3, 0, \dots, 0) + \dots + (a_n, \dots, a_n)$
- Nun können die einzelnen Summanden p-adisch entwickelt werden: $a_i - a_{i+1} = \sum_{j=0}^{m_i} p^j b_{i,j}$

- $\lambda = \sum_{j=0}^{m=max(m_i)} p^j \left(\sum_{i=0}^{n} b_{i,j}, \sum_{i=1}^{n} b_{i,j}, \ldots, b_{n,j}\right) =: \sum_{j=0}^{m} p^j \lambda_j$
- Dann ist $\lambda_j \in X_1(T)$ und Steinbergs Tensorproduktsatz besagt, dass

$$L(\lambda) = \bigotimes_{j=0}^{m} L(\lambda_j)^{[j]}$$

- Leider konnte ich keinen Beweis und keine Referenz für die Aussage finden, dass die Gewichte von $L(\lambda)$ für $\lambda \in X_1(T)$ in Charakterisitk 0 und in Charakterisitk p übereinstimmen. Diese Aussage wurde im *Sage*-Algorithmus verwendet.
  Seien von nun an die Gewichte von $L(\lambda_i)$ bekannt.
- Mit den Rechenregeln für Gewichte von Frobeniustwistungen aus 1.51 lassen sich die Gewichte von $L(\lambda_i)^{[i]}$ berechnen.
- Mit den Rechenregeln für Gewichte von Tensorprodukten aus 1.52 lassen sich Gewichte von $L(a_1, a_2)$ aus den Gewichten der $L(\lambda_i)^{[i]}$ zusammensetzen.

Da die Dimension der Gewichtsräume jeweils eins ist, ist die Dimension der Faktoren gleich der Anzahl ihrer Gewichte.

Diesen Algorithmus habe ich in Sage implementiert. Die Funktion *faktoren* verlangt als Eingabe zunächst einen Weylring. Dieser wird zum Beispiel mit

```
sage: A = WeylCharacterRing("A3")
```

erzeugt. Die 3 gibt an, dass dies der Weylring zu GL_4 ist.

```
sage: def faktoren(A,n,p,r):
...       K = Zp(p, print_mode='bars')
...       def prim(zahl): #p-adische Entwicklung von zahl
...           a=K(zahl)
...           import re
...           var = re.findall(r"(\d\d\d|\d\d|\d)",str(a))
...           var.reverse()
...           var = map(int, var)
...           return var
...       def loeschen(Q,C): #Gewichtsbestimmung vom nächsten
Zerlegungsreihenelement
...           P = Q[:]
...           for j in range(0,len(C)):
...               P.remove(C[j])
...           return P
...       def runden(P): #für eine kompatible Darstellung der Gewichte mit
Operationen wie Addition und Multiplikation
...           for i in range(0,len(P)):
```

```
...                 var =[]
...                 for j in range(0,n):
...                     var.append(P[i][j].ceil())
...                 P[i] = tuple(var)
...                 P[i] = map(int,P[i])
...             P = map(tuple,P)
...             return P
...         def symgewichte(r):#Berechnung der Gewichte von sym^r(V)
...             h=[r]
...             for i in range (0,n):
...                 h.append(0)
...             h = tuple(h)
...             P = list(A(h).weight_multiplicities())
...             P = runden(P)
...             return P
...
...         def gewichte(h): #Berechnung der Gewichte von L(h)
...             h = list(h)
...             for i in range (0,n-1):
...                 h[i] = h[i]-h[i+1]
...                 h[i] = prim(h[i])
...             h[n-1] = prim(h[n-1])
...
...             l=0
...             for i in range(0,len(h)):
...                 if l<len(h[i]):
...                     l = len(h[i])
...
...             for i in range(0,len(h)):
...                 for j in range(l-len(h[i])):
...                     h[i].append(0)
...
...             h = map(tuple,h)
...
...             L=[]
...             for j in range(0,len(h[0])):
...                 L.insert(0,[h[len(h)-1][j]])
...                 for i in range(1,n):
...                     L[0].insert(0,L[0][0]+h[len(h)-1-i][j])
...             L.reverse()
...             L = map(tuple,L)
...             for i in range(0,len(L)):
...                 Gewichte = A(L[i])
```

```
...                L[i] = list(Gewichte.weight_multiplicities())
...                L[i] = map(lambda x: x*p**i,L[i]) #Gewichte
vom Frobeniustwist
...
...            L = map(runden,L)
...
...            import operator
...            while len(L)>1:#Gewichte vom Tensorprodukt
...                Q = []
...                for i in range(0,len(L[0])):
...                    for l in range(0,len(L[1])):
...                        Q.append(tuple(map(operator.add,
L[0][i],L[1][l])))
...                L[0] = Q
...                del L[1]
...
...            L=L[0]
...
...            for i in range(0,len(L)):
...                L[i] = map(int,L[i])
...            L = map(tuple,L)
...
...            return L
...
...        Ergebnis =[]
...
...        PM = symgewichte(r)#die Gewichte von sym^r(V)
...        h=[r]
...        for i in range(0,n-1):
...            h.append(0)
...
...        h = list(h)
...        PV1 = gewichte(h) #Die Gewichte von L(r,0)
...
...        while len(PV1)<len(PM):
...            PC1 = loeschen(PM,PV1) #Die Gewichte vom Cokern
...            h = max(PC1) #Das Höchstgewicht vom Faktor
...            PF = gewichte(list(h)) #Die Gewichte vom Faktor
...            Ergebnis =  Ergebnis + [map(int,h),len(PF)]
...            PV1 = PF + PV1 #Die Gewichte vom nächsten Element der
Zerlegungsreihe
...
...        return Ergebnis
```

Literaturverzeichnis

[Borel 1991] Borel, Armand: *Linear Algebraic Groups.* New York, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo, Hong Kong, Barcelona : Springer-Verlag, 1991

[galileo computing 2008] computing galileo: *openbook.* Rheinwerkallee 4, 53227 Bonn : Galileo Press, 2008 `http://openbook.galileocomputing.de`

[Derenthal 2003] Derenthal, Ulrich: *Darstellungen und Prinzipal-Homogene Räume.* Göttingen, Georg-August-Universität, Diplomarbeit, 2003

[Engelschön u. Fößl 2013] Engelschön, Christopher ; Fößl, Thomas: *Die arithmetischen Eigenschaften der Binomialkoeffizienten.* `http://www.uni-graz.at/~baurk/lehre/SS2013-LAK-Seminar/V2.pdf`. Version: Juni 2013

[Fulton u. Harris 1991] Fulton, William ; Harris, Joe: *Representation Theory.* New York, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo, Hong Kong, Barcelona, Budapest : Springer-Verlag, 1991

[Hartshorne 1977] Hartshorne, Robin: *Algebraic Geometry.* New York, Berlin, Heidelberg, Barcelona, Budapest, Hong Kong, London, Milan, Paris, Santa Clara, Singapore, Tokyo : Springer-Verlag, 1977

[Humphrey 1975] Humphrey, James E.: *Linear Algebraic Groups.* New York, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo, Hong Kong, Budapest : Springer-Verlag, 1975

[Jantzen 2003] Jantzen, Jens C.: *Representation of Algebraic Groups.* American Mathematical Society, 2003

[Kirillov 2008] Kirillov, Alexander A.: *An Introduction to Lie groups and Lie algebras.* Cambridge University Press, 2008

[Kumpera 1980] Kumpera, A: Suites de Jordan-Hölder et principales d'un groupe de Lie. In: *J. Differential Geom* 15 (1980), Nr. 3, S. 307--353

[Springer 1998] Springer, T.A.: *Linear Algebraic Groups.* Boston, Basel, Berlin : Birkhäuser, 1998

[The Sage Development Team 2005] The Sage Development Team: *Sage Tutorial.* `http://www.sagemath.org/de/html/tutorial/`. Version: 2005-2011

[Waterhouse 1979] Waterhouse, William C.: *Introduction to Affine Group Schemes.* New York, Heidelberg, Berlin : Springer-Verlag, 1979

Danksagung

Zum Abschluss dieser Arbeit möchte ich mich bei allen bedanken, die mich unterstützt und an mich geglaubt haben.

Mein besonderer Dank richtet sich hierbei an meinen Betreuer Prof. Gebhard Böckle, der mein Studium schon seit dem ersten Semester begleitet hat und bei dem meine Fragen und Anliegen stets auf offene Ohren trafen.

Vielen Dank auch an Moritz, der diese Arbeit auf inhaltliche und formale Fehler Korrektur gelesen hat.

Meinen Eltern danke ich für ihre Unterstützung während meines gesamten Studiums und für ihr Interesse an all meinen Erzählungen. Außerdem möchte ich mich bei meinen Freunden für die schönen Erinnerungen und Ablenkungen, die meine Zeit in Heidelberg ausgemacht haben, bedanken.

Heidelberg, August 2013

Charlotte Ure

Erklärung

Ich versichere, die Bachelorarbeit selbstständig und lediglich unter Benutzung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel verfasst zu haben.

Ich erkläre weiterhin, dass die vorliegende Arbeit noch nicht im Rahmen eines anderen Prüfungsverfahrens eingereicht wurde.

Heidelberg, den 7. August 2013